Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Маланичева Наталья Николаевна
Должность: директор филиала
Дата подписания: 04.12.2024 16:17:56
Уникальный программный ключ:
94732c3d953a82d495dcc3155d5c573883fedd18

Приложение к ППССЗ
по специальности
23.02.01 « Организация перевозок и
управление на транспорте (по видам)»

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХСРЕДСТВ
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
ОП 11 Математика

по специальности

23.02.01 «Организация перевозок и управление на транспорте (по видам)»

2024 г.

Содержание

Фонд оценочных средств

a. Область применения контрольно-оценочных материалов

Результатом освоения дисциплины Математика является формирование знаний, умений, общекультурных и профессиональных компетенций.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине являет – дифференцированный зачет (3 семестр).

Виды проведения текущего контроля: письменный, устный, комбинированный опрос.

1.2.Требования к результатам освоения учебной дисциплины.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен

уметь:

У1 - использовать методы линейной алгебры;

У2 - решать основные прикладные задачи численными методами;

У3 - применять математические методы для решения профессиональных задач;

знать:

З1 - основные понятия и методы основ линейной алгебры, дискретной математики, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики;

З2 - основные численные методы решения прикладных задач.

a. Компетенции

В результате освоения дисциплины у обучающихся формируются общекультурные и профессиональные **компетенции:**

ОК 01. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 02. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

2. Модели контролируемых компетенций

Таблица 2.1. Модели контролируемых компетенций

Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины	Требования для освоения дисциплины
ОК 01 . Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.	**Знать:** **З1** - о назначение профессии, об основных решаемых профессиональных задачах о профессиональных важных качествах, а также потребности общества к данной профессии;
	Уметь: **У1** применять математические методы для решения профессиональных задач; **У2 –** владеть знаниями для понимания сущности и социальной значимости своей будущей профессии;
ОК 02. Организовывать	**Знать:**

собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.	**З1** - методы и способы профессионального развития; **З2** основные понятия о математическом синтезе и анализе; **З3** основные понятия дискретной математики; **З4** основные понятия теории вероятности и математической
	Уметь: **У1** применять математические методы для решения профессиональных задач; **У2** - выбирать и применять методы и способы решения профессиональных задач, уметь оценивать их эффективность, качество;

Контроль и оценка освоения учебной дисциплины по темам (разделам)

Элемент УД	Формы и методы контроля					
	Текущий контроль		Рубежный контроль		Промежуточная аттестация	
	Формы контроля	Проверяемые ОК,ПК, У, З,ЛР	Формы контроля	Проверяемые ОК,ПК, У, З,ЛР	Форма контроля	Проверяемые ОК,ПК, У, З,ЛР
Раздел 1. Основные понятия комплексных чисел						
Тема 1.1. Комплексные числа и действия над ними	УО. ПР,Т	З1-У4,У1-У2 ОК 01, ОК 02 ЛР 2, ЛР4, ЛР23, ЛР30				
Раздел 2. Элементы линейной алгебры			УО. ПР,Т	З1-У4,У1-У2 ОК 01, ОК 02 ЛР 2, ЛР4, ЛР23, ЛР30		
Тема 2.1. Матрицы и определители	УО. ПР,Т	З1-У4,У1-У2 ОК 01, ОК 02 ЛР 2, ЛР4, ЛР23, ЛР30				
Тема 2.2. Методы решения систем линейных уравнений	УО. ПР,Т	З1-У4,У1-У2 ОК 01, ОК 02 ЛР 2, ЛР4, ЛР23, ЛР30				
Тема 2.3. Моделирование и решение задач линейного	УО. ПР,Т	З1-У4,У1-У2 ОК 01, ОК 02 ЛР 2, ЛР4, ЛР23,				

программирования		ЛР30				
Раздел 3. Введение в анализ			УО. ПР,Т	З1-У4,У1-У2 ОК 01, ОК 02 ЛР 2, ЛР4, ЛР23, ЛР30		
Тема 3.1. Функции многих переменных	УО. ПР,Т	З1-У4,У1-У2 ОК 01, ОК 02 ЛР 2, ЛР4, ЛР23, ЛР30				
Тема 3.2. Пределы и непрерывность	УО. ПР,Т	З1-У4,У1-У2 ОК 01, ОК 02 ЛР 2, ЛР4, ЛР23, ЛР30				
Раздел 4. Дифференциальные исчисления			УО. ПР,Т	З1-У4,У1-У2 ОК 01, ОК 02 ЛР 2, ЛР4, ЛР23, ЛР30		
Тема 4.1. Производная и дифференциал	УО. ПР,Т	З1-У4,У1-У2 ОК 01, ОК 02 ЛР 2, ЛР4, ЛР23, ЛР30				
Раздел 5. Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения			УО. ПР,Т	З1-У4,У1-У2 ОК 01, ОК 02 ЛР 2, ЛР4, ЛР23, ЛР30		
Тема 5.1. Неопределённый интеграл	УО. ПР,Т	З1-У4,У1-У2 ОК 01, ОК 02				

		ЛР 2, ЛР4, ЛР23, ЛР30				
Тема 5.2. Определённый интеграл	УО. ПР,Т	З1-У4,У1-У2 ОК 01, ОК 02 ЛР 2, ЛР4, ЛР23, ЛР30				
Тема 5.3. Несобственный интеграл	УО. ПР,Т	З1-У4,У1-У2 ОК 01, ОК 02 ЛР 2, ЛР4, ЛР23, ЛР30				
Тема 5.4. Дифференциальные уравнения	УО. ПР,Т	З1-У4,У1-У2 ОК 01, ОК 02 ЛР 2, ЛР4, ЛР23, ЛР30			Э	З1-У4,У1-У2 ОК 01, ОК 02 ЛР 2, ЛР4, ЛР23, ЛР30

Принятые сокращения, З – зачет, , Э – экзамен , НС – накопительная система оценивания, РЗ – решение задач, ПР – проверочная работа, ПР-практическое работа; ВСР – выполнение внеаудиторной самостоятельной работы (домашние работы и другие виды работ или заданий). Для результатов освоения указывают только коды знаний, умений и компетенций

3.2 Кодификатор оценочных средств

Функциональный признак оценочного средства (тип контрольного задания)	Код оценочного средства
Устный опрос	УО
Практическая работа № n	ПР № n
Тестирование	Т
Контрольная работа № n	КР № n
Задания для самостоятельной работы - реферат; - доклад; - сообщение; - ЭССЕ.	СР
Разноуровневые задачи и задания (расчётные, графические)	РЗЗ
Рабочая тетрадь	РТ
Проект	П
Деловая игра	ДИ
Кейс-задача	КЗ
Зачёт	З
Дифференцированный зачёт	ДЗ
Экзамен	Э

Оценка освоения учебной дисциплины
Текущая аттестация студентов.

Критерии оценки

«отлично» - студент полно раскрыл содержание материала в объеме, предусмотренном программой и учебником, изложил материал грамотным языком в определенной логической последовательности, точно используя математическую терминологию и символику; правильно выполнил рисунки, чертежи, графики, сопутствующие ответу; показал умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами, применять их в новой ситуации при выполнении практического задания; продемонстрировал сформированность и устойчивость используемых при отработке умений и навыков, усвоение ранее изученных сопутствующих вопросов;

отвечал самостоятельно без наводящих вопросов учителя. Возможны одна - две неточности при освещении второстепенных вопросов или в выкладках, которые студент легко исправил по замечанию преподавателя

«хорошо» - ответ удовлетворяет в основном требованиям на оценку «5», но при том имеет один из недостатков: в изложении допущены небольшие пробелы, не исказившие математическое содержание ответа; допущены один – два недочета при освещении основного содержания ответа, исправленные по замечанию преподавателя; допущены ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов или в выкладках

«удовлетворительно» - неполно или непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного; имелись затруднения или допущены ошибки в определении понятий, использовании математической терминологии, чертежах, выкладках, исправленные после нескольких наводящих вопросов

«неудовлетворительно» - ставится, когда у студента имеются отдельные представления об изученном материале, но все же большая часть материала не усвоена

3.2. Самостоятельная работа

Критерии оценки

«отлично»- задание выполнено в полном объёме на 100%, материал полностью соответствует теме, изложение чёткое, ответы на вопросы исчерпывающие.

«хорошо»- задание выполнено на 70%, изложение неточное, студент затрудняется при ответах на вопросы.

«удовлетворительно»- задание выполнено на 40-50%, изложение материала вызывает затруднение, ответы на вопросы затруднённые или отсутствуют.

«неудовлетворительно»- задание не выполнено в полном объёме.

3.3. Практические занятия

Критерии оценки

«отлично» - работа выполнена полностью; в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок; в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала)

«хорошо» - работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки); допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки)

«удовлетворительно» - допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме

«неудовлетворительно» - допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

3.4. Промежуточная аттестация студентов

«отлично» - ставится при правильном решении задач и правильном ответе на два вопроса из разных разделов, а так же при ответе на дополнительные вопросы;

«хорошо» - ставится при правильном решении задач и правильном ответе на два вопроса без дополнительных вопросов;

«удовлетворительно» - ставится при правильном ответе на вопрос и правильном решении задачи;

«неудовлетворительно»- при правильном решении задачи и отсутствии ответа на вопросы.

4. Текущая аттестация студентов.

Текущая аттестация по учебной дисциплине «Математика» проводится в форме контрольных мероприятий (*устный опрос, контрольные работы и пр.*), оценивание фактических результатов обучения студентов осуществляется преподавателем.
Объектами оценивания выступают:

a. учебная дисциплина (активность на занятиях, своевременность выполнения различных видов заданий, посещаемость всех видов занятий по аттестуемой дисциплине);
b. степень усвоения теоретических знаний;
c. уровень овладения практическими умениями и навыками по всем видам учебной работы;
d. результаты самостоятельной работы.

Активность студента на занятиях оценивается на основе выполненных студентом работ и заданий, предусмотренных данной рабочей программой учебной дисциплины.

4.1. Задания для текущей аттестации.

Раздел 1. **Комплексные числа**

Тема 1.1 Решение систем уравнений Гаусса.

1. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
2. Матрицы и определители. Элементарные преобразования матрицы
3.Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.
4.Матрицы и определители. Элементарные преобразования матрицы.
5.Решение систем линейных уравнений матричным способом (метод обратной матрицы)
6.Применение различных методов решения систем линейных уравнений в задачах в области профессиональной деятельности

Тема 1.2 Основные формы комплексных чисел

Вопросы для устных (письменных) опросов:

1. Алгебраическая форма комплексного числа
2. Тригонометрическая форма комплексного числа
3. Показательная форма комплексного числа
4. Модуль комплексного числа
5. Сопряженные числа
6. Аргумент комплексного числа
7. Степень числа ***i***
8. Геометрический смысл комплексного числа

Тема 1.3 Действия над комплексными числами

Вопросы для устных (письменных) опросов:

1. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

2. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме
3. Действия над комплексными числами в показательной форме

Раздел 2. Основы дискретной математики
Тема 2.1 Основы теории множеств
Вопросы для устных (письменных) опросов:
1. Понятие множества
2. Понятие подмножества
3. Операции над множествами
4. Законы алгебры множеств
5. Определение диаграмм Венна-Эйлера
6. Понятие декартова произведения множеств
7. Понятие бинарного отношения
8. Понятие отношения эквивалентности

Тема 2.2 Основы теории графов
Вопросы для устных (письменных) опросов:
1. Неориентированный граф
2. Изоморфность двух графов
3. Степень вершины графа
4. Связный граф
5. Плоский граф
6. Эйлеров цикл в графе
7. Гамильтонов цикл в графе
8. Способы задания графов
9. Ориентированный граф

Раздел 3. Основы математического анализа
Тема 3. 1 Дифференциальное и интегральное исчисление
Вопросы для устных (письменных) опросов:
1. Предел функции в точке
2. Производная функция в точке
3. Основные формулы дифференцирования
4. Производная сложной функции
5. Геометрический и физический смысл производной
6. Неопределенный интеграл
7. Таблица интегралов
8. Определенный интеграл

Тема 3.2 Дифференциальные уравнения
Вопросы для устных (письменных) опросов:
1. Дифференциальное уравнение
2. Общее и частное решение дифференциального уравнения
3. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными
4. Линейное дифференциальное уравнение 1 порядка
5. Однородное дифференциальное уравнение 1 порядка
6. Линейное дифференциальное уравнение 2 порядка

Тема 3.3 Дифференциальные уравнения в частных производных
Вопросы для устных (письменных) опросов:
1. Дифференциальные уравнения в частных производных.
2. Применение дифференциальных уравнений в частных производных при решении профессиональных задач

Тема 3.4 Ряды
Вопросы для устных (письменных) опросов:
1. Определение ряда
2. Частичные суммы ряда
3. Необходимый признак сходимости ряда
4. Достаточные признаки сходимости ряда
5. Знакочередующийся ряд
6. Абсолютная и условная сходимость
7. Степенной ряд
8. Область сходимости степенного ряда
9. Ряд Тейлора и ряд Маклорена
10. Ряд Фурье

Раздел 4. Элементы теории вероятностей и математической статистики
Тема 4.1 Вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей
Вопросы для устных (письменных) опросов:
1.Классификация событий
2. Классическое определение вероятности
3. Теоремы сложения и умножения вероятностей
4. Формула полной вероятности
5. Формула Байеса

Тема 4.2 Случайная величина, ее функция распределения
Вопросы для устных (письменных) опросов:
1. Дискретная случайная величина
2. Составить закон распределения случайной величины
3. Функция распределения F(x), ее график.

Тема 4.3 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины
Вопросы для устных (письменных) опросов:
1. Математическое ожидание случайной величины
2. Дисперсия, среднее квадратическое отклонение

Раздел 5. Основные численные методы
Тема 5.1 Численное интегрирование. Вычисление определенных интегралов
Вопросы для устных (письменных) опросов:
1.Вычисление приближенного значения интеграла с помощью формулы прямоугольников
2. Вычисление приближенного значения интеграла с помощью формулы трапеций
3. Вычисление приближенного значения интеграла с помощью формулы Симпсона
Тема 5.2 Численное дифференцирование
Вопросы для устных (письменных) опросов:
1. Численное дифференцирование
2. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на интерполяционных формулах Ньютона
3. Погрешность в определении производной

5. Самостоятельная работа студентов

Самостоятельная работа включает в себя подготовку докладов с презентацией, работа с дополнительной литературой и ответы на вопросы.

Раздел 1. Комплексные числа
Тема 1.1 Решение систем уравнений Гаусса.

Выполнение тренировочных заданий: «Матрицы и определители. Элементарные преобразования матрицы. Решение систем линейных уравнений матричным способом (метод обратной матрицы) Применение различных методов решения систем линейных уравнений в задачах в области профессиональной деятельности»

Тема 1.2 Основные формы комплексных чисел

Темы докладов или презентаций:

«Комплексные числа», «Основные формы комплексных чисел: алгебраическая, тригонометрическая, показательная», «Геометрическая интерпретация комплексных чисел»..

Тема 1.3 Действия над комплексными числами

Выполнение тренировочных и зачетных заданий по теме: « Прикладное применение комплексных чисел при анализе процессов в электрических цепях устройств ЖАТ»

Раздел 2. Основы дискретной математики

Тема 2.1 Основы теории множеств

Темы докладов или презентаций:

«Георг Кантор – основоположник теории бесконечности», «Парадокс Рассела»

Проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы (по вопросам к разделам и главам учебной литературы, а также составленных преподавателем). Решение вариативных задач и упражнений.

Тема 2.2 Основы теории графов

Темы докладов или презентаций:

«Леонард Эйлер», «Применение теории графов при решении профессиональных задач в экономике и логистике», «Построение графа по условию ситуационных задач: в управлении инфраструктурами на транспорте; в структуре взаимодействия различных видов транспорта, в формировании технологического цикла оказания услуг на транспорте»

Раздел 3. Основы математического анализа

Тема 3. 1 Дифференциальное и интегральное исчисление

Темы докладов или презентаций:

«Развитие интегрального исчисления», «Определение максимума мощности в цепи постоянного тока с применением производной»,

«Вычисления площадей и объемов при проектировании объектов транспорта с применением определенного интеграла»

Систематическая проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы. Поиск, анализ и оценка информации (профессиональные базы данных, ресурсы сети Интернет) по содержанию учебного материала и определению профессионально значимых задач. Подготовка сообщений или презентаций

Тема 3. 2 Дифференциальные уравнения

Темы докладов или презентаций:

«Дифференциальные уравнения первого и второго порядка», «Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными», «Однородные уравнения первого порядка», «Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами», «Применение обыкновенных дифференциальных уравнений при решении профессиональных задач».

Тема 3.3 Дифференциальные уравнения в частных производных

Проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы (по вопросам к разделам и главам учебных изданий, а также составленных преподавателем), поиск, анализ и оценка дополнительной информации по содержанию учебного материала и определению профессионально значимых задач

Тема 3.4 Ряды
Решение ситуационных и производственных (профессиональных) задач, определение способов выполнения профессиональных задач, оценка их эффективности и качества

Раздел 4. Элементы теории вероятностей и математической статистики
Тема 4.1 Вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей
Темы докладов или презентаций:
«Комбинаторные задачи», «Треугольник Паскаля», «История теории вероятностей», «Вероятность и ДНК», «Решение задач на нахождение вероятности события при изучении и планировании рынка услуг на транспорте»
Тема 4.2 Случайная величина, ее функция распределения
Решение ситуационных и производственных (профессиональных) задач, определение способов, выполнения профессиональных задач, оценка их эффективности и качества.

Тема 4.3 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины
Темы докладов или презентаций:
«Вероятность и статистика в медицине», «Решение задач на нахождение математического ожидания и дисперсии при оценке эффективности заказов и обслуживания потребителей услуг и при оценке систем надежности, безопасности и качества услуг на железнодорожном транспорте»
Проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы (по вопросам к разделам и главам учебной литературы, а также составленных преподавателем).

Раздел 5. Основные численные методы
Тема 5.1 Численное интегрирование. Вычисление определенных интегралов
Проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы (по вопросам к разделам и главам учебной литературы, а также составленных преподавателем). Определение метода и способа выполнения профессиональных задач, оценка их эффективности и качества

Тема 5.2 Численное дифференцирование
Проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы (по вопросам к разделам и главам учебных изданий, а также составленных преподавателем). Определение метода и способа выполнения профессиональных задач, оценка их эффективности и качества.

6. Задания на практические занятия

Раздел 1.

Практическое занятие № 1

Тема 1.1 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Тема: Система m линейных уравнений с n переменными. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Цель: отработать навыки решения систем линейных уравнений методом Гаусса.

Материальное обеспечение: практическая работа, программное обеспечение.

Общие теоретические положения

Наиболее распространенным точным методом решения системы линейных уравнений является метод Гаусса. Сущность этого метода состоит в том, что посредством последовательных исключений неизвестных данная система превращается в ступенчатую (в частности, треугольную) систему.

Пусть дана произвольная система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \quad (1)$$

Будем производить над ней элементарные преобразования. Для этого выпишем матрицу из коэффициентов при неизвестных системы (1) с добавлением столбца свободных членов, другими словами **расширенную матрицу $\bar{A}$** для системы (1):

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix} \quad (2).$$

$$a_{s1} \quad a_{s2} \quad \quad a_{sn} \quad b_s$$

Предположим, что с помощью таких преобразований удалось привести матрицу $\bar{A}$ к виду:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & \cdots & b_{1n} & c_1 \\ & b_{22} & \cdots & b_{2r} & \cdots & b_{2n} & c_2 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & b_{rr} & \cdots & b_{rn} & c_r \end{pmatrix} \quad (r \le n), \quad (3),$$

где все диагональные элементы $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{rr}$ отличны от нуля, а элементы, расположенные ниже диагональных, равны нулю. Матрице (3) соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1r}x_r + \ldots + b_{1n}x_n = c_1, \\ b_{22}x_2 + \ldots + b_{2r}x_r + \ldots + b_{2n}x_n = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{rr}x_r + \ldots + b_{rn}x_n = c_r, \end{cases} \quad (4),$$

которая получается из системы (1) с помощью некоторого числа элементарных преобразований и, следовательно, равносильна системе (1). Если в системе (4) $r=n$, то из последнего уравнения , имеющего вид $b_{nn}x_n=c_n$(где $b_{nn}\neq 0$), находим единственное значение x_n, из предпоследнего уравнения – значение x_{n-1} (поскольку x_n уже известно) и т.д., наконец, из первого уравнения – значение x_1. Итак, в случае)$r=n$ система имеет единственное решение. Если же $r<n$, то система (4) легко приводится к системе вида:

$$\begin{cases} x_1=\alpha_{1,\,r+1}x_{r+1}+\ldots+\alpha_{1n}x_n+\beta_1, \\ x_2=\alpha_{2,\,r+1}x_{r+1}+\ldots+\alpha_{2n}x_n+\beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r=\alpha_{r,\,r+1}x_{r+1}+\ldots+\alpha_{rn}x_n+\beta_r. \end{cases} \quad r<n, \ (5),$$

которая и является по существу **общим решением** системы (1).

Неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ называются **свободными**. Из системы (5) можно будет найти значения $x_1,\ldots, x_r$.

Приведение матрицы $\bar{A}$ к виду (3) возможно только в том случае, когда исходная система уравнений (1) совместна. Если же система (1) несовместна, то такое приведение невозможно. Это обстоятельство выражается в том, что в процессе преобразований матрицы $\bar{A}$ в ней появляется строка, в которой все элементы равны нулю, кроме последнего. Такая строка соответствует уравнению вида:

$$0*x_1+0*x_2+\ldots+0*x_n=b,$$

которому не удовлетворяют никакие значения неизвестных, так как $b\neq 0$. В этом случае система несовместна.

В процессе приведения системы (1) к ступенчатому виду могут получаться уравнения вида 0=0. Их можно отбрасывать, так как это приводит к системе уравнений, эквивалентных прежней.

При решении системы линейных уравнений методом Гаусса удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а расширенную матрицу этой системы, выполняя все преобразования над её строками. Последовательно получающиеся в ходе преобразований матрицы обычно соединяют знаком эквивалентности.

Решим следующую систему уравнений с 4-мя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3+x_4=20, \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=11, \\ 2x_1+10x_2+9x_3+7x_4=40, \\ 3x_1+8x_2+9x_3+2x_4=37. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу из коэффициентов при неизвестных с добавлением столбца свободных членов.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 & 20 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & 37 \end{pmatrix}$$

Произведём анализ строк расширенной матрицы:

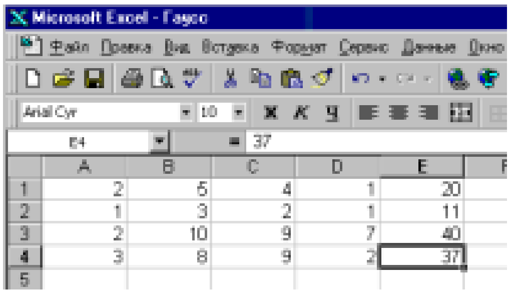
– к элементам 2-ой строки прибавим элементы 1-ой, делённые на (-2);

– из 3-ей строки вычтем 1-ю строку;

– к 4-ой строке прибавим 1-ю, умноженную на (-3/2).

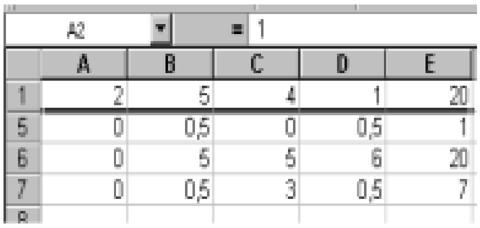
В качестве вычислительного средства воспользуемся инструментами программы *табличный редактор*.

1. Включите компьютер.
2. Подождите пока загрузится операционная система *Windows*, после чего *откройте окно табличного редактора*.
3. *Заполните ячейки* таблицы значениями расширенной матрицы (рисунок 1)



	A	B	C	D	E
1	2	5	4	1	20
2	1	3	2	1	11
3	2	10	9	7	40
4	3	8	9	2	37
5					

Рисунок 1

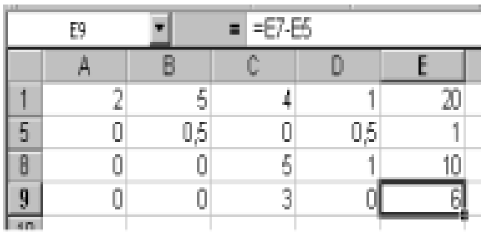


	A	B	C	D	E
1	2	5	4	1	20
5	0	0,5	0	0,5	1
6	0	5	5	6	20
7	0	0,5	3	0,5	7

Рисунок 2

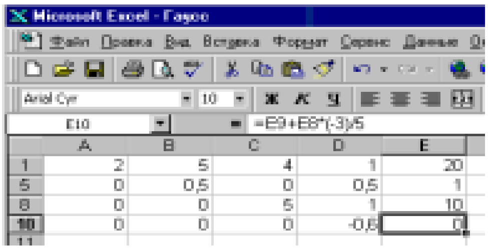
4. Для выполнения выбранного словесного алгоритма производим следующие действия.
   - *Активизируйте ячейку* A5 и с клавиатуры занесите в неё формулу вида =A2+A1/(-2), после чего *автозаполнением* занесите численные результаты в ячейки B5÷E5;
   - В ячейке A6 разместим результат вычитания 1-ой строки из 3-ей, и снова, пользуясь *автозаполнением*, заполним ячейки B6÷E6;
   - в ячейке A7 запишем формулу вида =A4+A1*(-3/2) и *автозаполнением* занесём численные результаты в ячейки B7÷E7.
   - Далее *скроем* 2, 3 и 4 – строки, которые нам уже не нужны. Для этого воспользуемся пунктом меню ФОРМАТ→СТРОКА→СКРЫТЬ. Результат показан на рисунок 2.
5. Снова произведём анализ строк получившихся в результате элементарных преобразований матрицы, чтобы привести её к треугольному виду.
   - К 6-ой строке прибавим 5-ю, умноженную на число (-10);
   - из 7-ой строки вычтем 5-ю.

Записанный алгоритм реализуем в ячейках А8, А9, после чего *скроем* 6 и 7 – строки (см. рисунок 3).



	A	B	C	D	E
1	2	5	4	1	20
5	0	0,5	0	0,5	1
8	0	0	5	1	10
9	0	0	3	0	6

Рисунок 3



	A	B	C	D	E
1	2	5	4	1	20
5	0	0,5	0	0,5	1
8	0	0	5	1	10
10	0	0	0	-0,6	0

Рисунок 4

6. И последнее, что нужно сделать, чтобы привести матрицу к треугольному виду – это к 9-ой строке прибавить 8-ю, умноженную на (-3/5), после чего *скрыть* 9-ю строку (рисунок 4).

Как вы можете видеть, элементы получившейся матрицы находятся в 1, 5, 8 и 10 строках, при этом ранг получившейся матрицы **r** = 4, следовательно, данная система уравнений имеет единственное решение. Выпишем получившуюся систему:

$$2x_1+5x_2+4x_3+x_4=20,$$
$$0,5x_2+0,5x_4=1,$$
$$5x_3+x_4=10,$$
$$-0,6x_4=0.$$

Из последнего уравнения легко находим $x_4=0$; из 3-го уравнения находим $x_3=2$; из 2-го – $x_2=2$ и из 1-го – $x_1=1$ соответственно.

Задание к работе:

Методом Гаусса решите системы уравнений:

$$1)\begin{cases}7x_1+9x_2+4x_3+2x_4=2, & x_1=-0{,}4\\ 2x_1-2x_2+x_3+x_4=6, & x_2=-1{,}2\\ 5x_1+6x_2+3x_3+2x_4=3, & x_3=3{,}4\\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=0. & x_4=1.\end{cases}$$

$$2)\begin{cases}2x_1-3x_2+3x_3+2x_4=3, & x_1=\frac{1}{2},\\ 6x_1+9x_2-2x_3-x_4=-4, & x_2=-\frac{2}{3},\\ 10x_1+3x_2-3x_3-2x_4=3, & x_3=2,\\ 8x_1+6x_2+x_3+3x_4=-7. & x_4=-3.\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}6x_1+5x_2-2x_3+4x_4=-4, & x_1=\frac{2}{3},\\ 9x_1-x_2+4x_3-x_4=13, & x_2=-1,\\ 3x_1+4x_2+2x_3-2x_4=1, & x_3=\frac{3}{2},\\ 3x_1-9x_2+2x_4=11. & x_4=0.\end{cases}$$

$$4)\begin{cases}4x_1-3x_2+x_3+5x_4=7, & x_1=2,\\ x_1-2x_2-2x_3-3x_4=3, & x_2=1,\\ 3x_1-x_2+2x_3=-1, & x_3=-3,\\ 2x_1+3x_2+2x_3-8x_4=-7. & x_4=1.\end{cases}$$

$$5)\begin{cases}2x_1-x_2-6x_3+3x_4=-1, & x_1=-3,\\ 7x_1-4x_2+2x_3-15x_4=-32, & x_2=0,\\ x_1-2x_2-4x_3+9x_4=5, & x_3=-\frac{1}{2},\\ x_1-x_2+2x_3-6x_4=-8. & x_4=\frac{2}{3}.\end{cases}$$

$$6)\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-2x_4=1, & x_1=\frac{2}{3},\\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=2, & x_2=-\frac{43}{18},\\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=-5, & x_3=\frac{13}{9},\\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=11. & x_4=-\frac{7}{18}.\end{cases}$$

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Применять метод Гаусса можно к любой системе линейных уравнений?

2. Можно получить множество решений, при решении систем линейных уравнений методом Гаусса?

Практическое занятие № 2

Тема: «Матрицы и определители. Элементарные преобразования матрицы. Решение систем линейных уравнений матричным способом (метод обратной матрицы) Применение различных методов решения систем линейных уравнений в задачах в области профессиональной деятельности»

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с помощью обратной матрицы (иногда этот способ именуют ещё матричным методом или методом обратной матрицы) требует предварительного ознакомления с таким понятием как матричная форма записи СЛАУ. Метод обратной матрицы предназначен для решения тех систем линейных алгебраических уравнений, у которых определитель матрицы системы отличен от нуля. Естественно, при этом подразумевается, что матрица системы квадратна (понятие определителя существует только для квадратных матриц). Суть метода обратной матрицы можно выразить в трёх пунктах:

1. Записать три матрицы: матрицу системы A, матрицу неизвестных X, матрицу свободных членов B.
2. Найти обратную матрицу A^{-1}.
3. Используя равенство $X=A^{-1}\cdot B$ получить решение заданной СЛАУ.

Почему $X=A^{-1}\cdot B$? показать\скрыть

Перед переходом к чтению примеров рекомендую ознакомиться с методами вычисления обратных матриц, изложенными здесь.

Пример №1

Решить СЛАУ $\left\{\begin{aligned} & -5x_1+7x_2=29;\\ & 9x_1+8x_2=-11. \end{aligned}\right.$ с помощью обратной матрицы.

Решение

Запишем матрицу системы A, матрицу свободных членов B и матрицу неизвестных X.

$$A=\left(\begin{array}{cc} -5 & 7\\ 9 & 8 \end{array}\right);\; B=\left(\begin{array}{c} 29\\ -11 \end{array}\right);\; X=\left(\begin{array}{c} x_1\\ x_2 \end{array}\right).$$

Найдём обратную матрицу к матрице системы, т.е. вычислим A^{-1}. В примере № 2 на странице, посвящённой нахождению обратных матриц, обратная матрица была уже найдена. Воспользуемся готовым результатом и запишем A^{-1}:

$$A^{-1}=-\frac{1}{103}\cdot\left(\begin{array}{cc} 8 & -7\\ -9 & -5 \end{array}\right).$$

Теперь подставим все три матрицы (X, A^{-1}, B) в равенство $X=A^{-1}\cdot B$. Затем выполним умножение матриц в правой части данного равенства.

$$\left(\begin{array}{c} x_1\\ x_2 \end{array}\right)=-\frac{1}{103}\cdot\left(\begin{array}{cc} 8 & -7\\ -9 & -5 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c} 29\\ -11 \end{array}\right)=$$
$$=-\frac{1}{103}\cdot\left(\begin{array}{c} 8\cdot 29+(-7)\cdot(-11)\\ -9\cdot 29+(-5)\cdot(-11) \end{array}\right)=-\frac{1}{103}\cdot\left(\begin{array}{c} 309\\ -206 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} -3\\ 2 \end{array}\right).$$

Итак, мы получили равенство $\left(\begin{array}{c} x_1\\ x_2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} -3\\ 2 \end{array}\right)$. Из этого равенства имеем: $x_1=-3$, $x_2=2$.

Ответ: $x_1=-3$, $x_2=2$.

Пример №2

Решить СЛАУ $\left\{\begin{aligned} & x_1+7x_2+3x_3=-1;\\ & -4x_1+9x_2+4x_3=0; \end{aligned}\right.$ методом обратной матрицы.

Решение

Запишем матрицу системы A, матрицу свободных членов B и матрицу неизвестных X.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 3\\ -4 & 9 & 4\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 6\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Теперь настал черёд найти обратную матрицу к матрице системы, т.е. найти A^{-1}. В примере № 3 на странице, посвящённой нахождению обратных матриц, обратная матрица была уже найдена. Воспользуемся готовым результатом и запишем A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{26}\cdot\begin{pmatrix}6 & -5 & 1\\ 8 & 2 & -16\\ -12 & -3 & 37\end{pmatrix}.$$

Теперь подставим все три матрицы (X, A^{-1}, B) в равенство $X=A^{-1}\cdot B$, после чего выполним умножение матриц в правой части данного равенства.

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{26}\cdot\begin{pmatrix}6 & -5 & 1\\ 8 & 2 & -16\\ -12 & -3 & 37\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 6\end{pmatrix}=$$
$$=\frac{1}{26}\cdot\begin{pmatrix}6\cdot(-1)+(-5)\cdot 0+1\cdot 6\\ 8\cdot(-1)+2\cdot 0+(-16)\cdot 6\\ -12\cdot(-1)+(-3)\cdot 0+37\cdot 6\end{pmatrix}=\frac{1}{26}\cdot\begin{pmatrix}0\\ -104\\ 234\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -4\\ 9\end{pmatrix}$$

Итак, мы получили равенство $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -4\\ 9\end{pmatrix}$. Из этого равенства имеем: $x_1=0$, $x_2=-4$, $x_3=9$.

Ответ: $x_1=0$, $x_2=-4$, $x_3=9$.

Естественно, что решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы без применения специальных программ вроде Mathcad возможно лишь при сравнительно небольшом количестве переменных.

Если СЛАУ содержит четыре и более переменных, то гораздо удобнее в таком случае применить метод Гаусса или метод Гаусса-Жордана.

Тема 1.3 Действия над комплексными числами

Практическое занятие № 3,4

Тема занятия: Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах. Переход от алгебраической формы к тригонометрической и показательной и обратно.

Цель: расширение и закрепление теоретических знаний

1. Вычислите:

а) $\dfrac{1+3i}{-2+i}\cdot(-2i)+1$;

б) $\left(\dfrac{i^{16}+3}{i^{6}+3}\right)^{5}$.

2. Найдите модуль и аргумент комплексного числа z:

$z=(-5+i)(-5-i)$

3. Выполните умножение, используя тригонометрическую форму комплексного числа:

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{i\sqrt{6}}{6}\right).$$

4. Возведите в степень по формуле Муавра и запишите результат в алгебраической форме: $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^9$.

5. Извлеките корень: $\sqrt{2+2i\sqrt{3}}$.

6. Изобразите на комплексной области множество всех точек z,удовлетворяющих условию:

$|z-1+i|\geq 1$, Re z >1, Im z ≤ -1.

7. Выполните действия в показательной форме:

$$8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right):\left(4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

Раздел 2. Основы дискретной математики

Тема 2.2 Основы теории графов

Практическое занятие № 5

Тема: Решение вариативных задач и упражнений.

Задача 1. На рисунке справа схема дорог Н-ского района изображена в виде графа; в таблице слева содержатся сведения о протяжённости каждой из этих дорог (в километрах).

	П1	П2	П3	П4	П5	П6
П1		10			8	5
П2	10			20	12	
П3				4		
П4		20	4		15	
П5	8	12		15		7
П6	5				7	

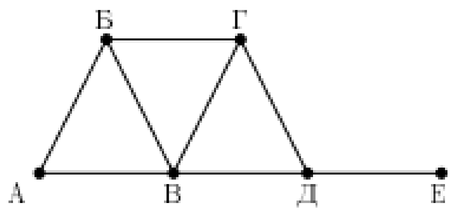


Рис. 4: Граф дорог Н-ского района

Так как таблицу и схему рисовали независимо друг от друга, то нумерация населённых пунктов в таблице никак не связана с буквенными обозначениями на графе. Определите, какова протяжённость дороги из пункта Б в пункт В. В ответе запишите целое число — так, как оно указано в таблице.

Решение. Из рисунка видно, что у вершины Е есть ровно один сосед — вершина Д, причём никакая другая вершина не обладает таким свойством. Найдём в таблице вершину с единственным соседом. Это вершина П3, а её сосед — П4. Следовательно, П3 = Е, П4 = Д. Точно так же мы замечаем, что только В и П5 имеют по четыре соседа. Следовательно, П5 = В. У вершины Д есть ещё один сосед, помимо В и Е — это вершина Г. Третьим соседом вершины П4 является П2, значит, П2 = Г. Наконец, мы заметим, что только А и П6 имеют по два соседа, поэтому П6 = А. Остаётся только одна нерассмотренная вершина, следовательно, П1 = Б.

Итак, мы доказали, что П1 = Б, П5 = В. Следовательно, длина дороги из Б в В равна 8.

Ответ: 8.

Задача 2. Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F, G построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.

	A	B	C	D	E	F	G
A		5		12			25
B	5			8			
C				2	4	5	10
D	12	8	2				
E			4				5
F			5				5
G	25		10		5	5	

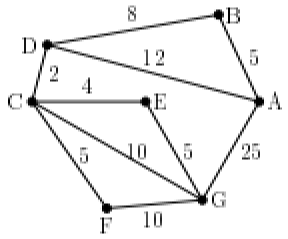


Рис. 5: Дороги между населёнными пунктами

Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и G (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

Решение. Для наглядности изобразим граф в виде рисунка (см. рис. 5). Сразу видно, что есть путь из A в G из одного ребра длины 25. Поищем более короткие пути. Поскольку длины всех рёбер положительны, то кратчайший путь не может содержать циклов. Кратчайший путь из A в B имеет длину 5 (это одно ребро), так как любое другое выходящее из A ребро имеет большую длину. Кратчайший путь из A в D имеет длину 12 (тоже одно ребро), так как единственный альтернативный путь A → B → D имеет длину 13. Поэтому кратчайший путь из A в C имеет длину 14 (A → D → C). Из C в G ведут три пути (без циклов): путь C → E → G длины 9, путь C → G длины 10 и путь C → F → G длины 15. Кратчайший из них имеет длину 9. Поэтому длина кратчайшего «обходного» пути из A в G равна $14 + 9 = 23 < 25$. Значит, кратчайший путь из A в G имеет длину 23.

Ответ: 23.

Задача 3. На рисунке представлена схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К, Л, М. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город М, проходящих через город В?

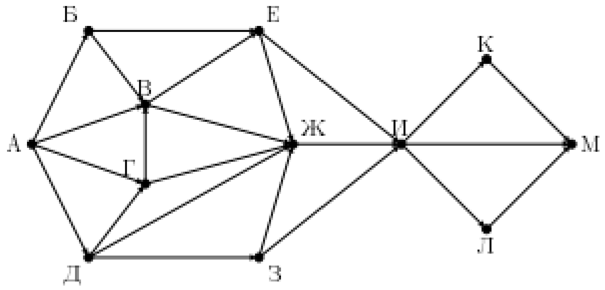


Рис. 6: Схема дорог

Решение. Из рисунка видно, что любой путь из А в М проходит через И. По условию задачи мы должны искать только те пути, которые проходят через В. Обозначим число путей через N.

По теореме 1 $N = p(\text{А}, \text{В})p(\text{В}, \text{И})p(\text{И}, \text{М})$. Из рисунка видно, что имеется четыре пути из А в В (А → Б → В, А → В, А → Г → В, А → Д → Г → В), три пути из В в И (В → Е → И, В → Ж → И, В → Е → Ж → И) и три пути из И в М (И → К → М, И → М, И → Л → М). Получаем $N = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.
Ответ: 36.

Задача 4. Сколько существует различных путей из города А в город И для схемы дорог из предыдущей задачи?
Решение. Из рисунка видно, что не существует такой вершины v, через которую проходил бы любой путь из А в И, поэтому теорема 1 не поможет. Воспользуемся общим алгоритмом. Оформим решение в виде таблицы. В первом столбце будем писать номер итерации, во втором столбце — выбранную на этой итерации вершину, а в остальных двенадцати столбцах — число путей из А в вершину, которой помечен столбец. Чтобы не загромождать таблицу, не будем писать нули, оставив вместо них пустые клетки. (Таблица использована для краткой записи всех шагов алгоритма. При решении задач можно просто подписывать число путей рядом с каждой вершиной.)

№	v	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л	М
0	–	1											
1	Б	1	1										
2	Д	1	1			1							
3	Г	1	1		2	1							
4	З	1	1		2	1			1				
5	В	1	1	4	2	1			1				
6	Е	1	1	4	2	1	5		1				
7	Ж	1	1	4	2	1	5	12	1				
8	И	1	1	4	2	1	5	12	1	18			
9	К	1	1	4	2	1	5	12	1	18	18		
10	Л	1	1	4	2	1	5	12	1	18	18	18	
11	М	1	1	4	2	1	5	12	1	18	18	18	54

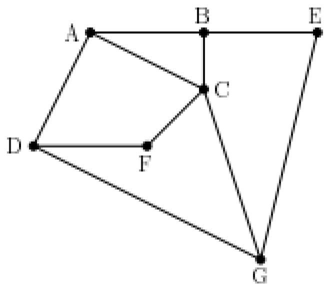
Рис. 7: Работа алгоритма для поиска числа путей

Прокомментируем несколько итераций. На итерации 1 есть две вершины, все непосредственные предшественники которых уже отмечены. Это вершины Б и Д с предшественником А. Мы выбираем вершину Б и вычисляем $p(\text{А}, \text{Б}) = 1$ (можно было выбрать и Д). На итерации 4 уже помечены вершины А, Б, Д и Г. Поэтому мы можем выбрать любую из вершин В, З. Мы выбрали З и вычислили $p(\text{А}, \text{З}) = 1$. На итерации 5 можно выбрать только одну вершину — В. Её непосредственные предшественники — А, Б и Г. Складывая значения, приписанные этим трём вершинам, получаем $p(\text{А}, \text{В}) = 1 + 1 + 2 = 4$. Остальные итерации срабатывают аналогично.

Заметим, что мы могли и не вычислять число путей для *всех* вершин. Как только мы узнали, что $p(\text{А}, \text{И}) = 18$ (это произошло в итерации 8), можно было остановиться и не рассматривать вершины К, Л, М. Итак, $p(\text{А}, \text{И}) = 18$.
Ответ: 18.

Упражнения.

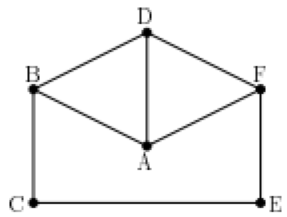
Упражнение 1. Неориентированный граф задан в виде рисунка и в виде таблицы. Установите соответствие между вершинами этих представлений графа.



	1	2	3	4	5	6	7
1					1	1	
2				1	1		1
3				1			1
4		1	1		1	1	
5	1	1		1			
6	1			1			1
7		1	1			1	

Рис. 8: Граф из упражнения 1

Упражнение 2. Нагруженный неориентированный граф задан в виде рисунка и в виде таблицы. Чему равна длина ребра, соединяющего вершины B и D?



	1	2	3	4	5	6
1			5	5	7	
2					12	7
3	5			9		5
4	5		9			5
5	7	12				
6		7	5	5		

Рис. 9: Граф из упражнения 2

Упражнение 3. Неориентированный граф задан таблицей. Найдите длину кратчайшего пути из вершины A в вершину D.

	A	B	C	D	E	F	G
A		10	12				
B	10		7				1
C	12	7		9	1		
D			9			4	
E			1			3	2
F				4	3		7
G		1			2	7	

Рис. 10: Граф из упражнения 3

Упражнение 4. Ориентированный граф задан таблицей. Найдите длины кратчайших путей из B в E и из E в B.

	A	B	C	D	E	F	G
A			1	5			3
B	2				10		
C		1			8	6	3
D							4
E	6						3
F					4		
G	2					2	

Рис. 11: Граф из упражнения 4

Упражнение 5. Ориентированный граф задан рисунком.
а) Сколько существует различных путей из A в N?
б) Сколько существует путей из A в N, проходящих через E, но не проходящих через L?
в) Сколько существует путей из A в N, проходящих и через F, и через K?
г) Какова длина самого длинного пути из A в N? Сколько существует таких путей?

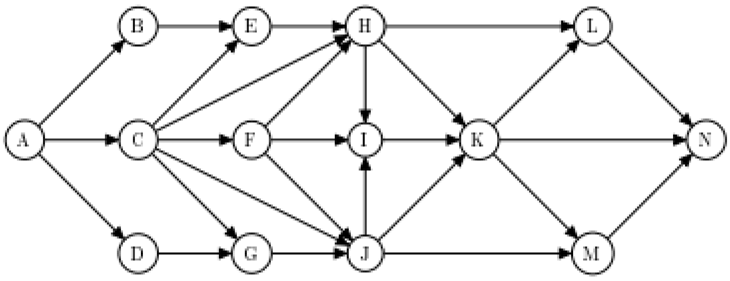


Рис. 12: Граф из упражнения 5

Указания к упражнениям.

Упражнение 1. Используйте метод из решения задачи 1. Может оказаться, что на некотором шаге не удаётся найти две соответствующие друг другу вершины. Тогда нужно попытаться использовать дополнительную информацию. Например, если оказалось, что вершины А, Б совпадают с вершинами П1, П2 (без учёта порядка), а вершины А, В — с вершинами П2, П3 (тоже без учёта порядка), то А = П2, так как только эти две вершины встречаются по два раза.

Упражнение 2. В задаче не требуется установить соответствие между вершинами. Нужно лишь найти длину ребра, соединяющего B и D. Само ребро не обязательно определяется однозначно.

Упражнение 3. Используйте тот же метод, что и в задаче 2: последовательно вычислять длины кратчайших путей из A до других вершин.

Упражнение 4. Используйте тот же метод, что и в задаче 2. Единственное отличие состоит в том, что теперь граф ориентированный, поэтому по рёбрам можно идти лишь в одну сторону. Следовательно, длины кратчайших путей из B в E и из E в B могут быть разными.

Упражнение 5. а) Используйте алгоритм.
б) Если пути не проходят через L, то L с входящими в неё и выходящими из неё рёбрами можно удалить из графа. После этого нужно решить задачу для оставшегося графа.
в) Используйте алгоритм и теорему об умножении.
г) Используйте ту же идею, что и в алгоритме для поиска числа всех путей. Нужно запоминать только те пути, длина которых максимальна.

Практическое занятие № 6
Тема занятия: Построение графов.
Цель: систематизировать и обобщить знания по теме

1. Показать, что два графа изоморфны:

2. Начертить орграф, соответствующий отношению: «а делится на b» на множестве целых чисел от 1 до 12.
3. Построить матрицы смежности и инцидентности графа G:
4. Дана матрица смежности. Постройте соответствующий ей орграф. Найдите матрицу инцидентности.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. В графе 11 вершин, степени которых равны 4. Сколько ребер имеет этот граф?
6. Является ли граф эйлеровым; двудольным? Если граф является эйлеровым, найти эйлеров цикл.

7. Перечислите все графы, имеющие гамильтонов цикл, 6 вершин, 8 ребер.

Раздел 3. Основы математического анализа
Тема 3.1 Дифференциальное и интегральное исчисление
Практическое занятие 7

Пределы. Непрерывность функций. Производная, геометрический смысл. Исследование

функций

1.Вычислить производную функций:

а) $y=\left(3+2x^2\right)^4$; б) $y=\ln\cos x^2$; в) $y=\arcsin\sqrt{1-3x}$;

г) $y=tg\dfrac{x}{1+x}$; д) $y=\sin\left(x^2+2\right)$ е) $y=4^{\cos x}\cdot arctg\,2x$.

а) $y=ctg^2x+2\ln(\sin x)$; б) $y=arctg\sqrt{9x^2-1}$;

в) $y=3^{\cos^2x-2\cos x}$; г) $y=\ln\sin\dfrac{x}{2}$.

Решение. а) Применим правила дифференцирования суммы и сложной функции:

$$y'=\left(ctg^2x\right)'+2(\ln(\sin x))'=2ctgx\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2x}\right)+2\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=2ctgx\left(1-\frac{1}{\sin^2x}\right)=-2ctg^3x.$$

б) $$\left(arctg\sqrt{9x^2-1}\right)'=\frac{1}{1+\left(9x^2-1\right)}\cdot\frac{1}{2\sqrt{9x^2-1}}\cdot 9\cdot 2x=\frac{1}{x\sqrt{9x^2-1}}.$$

в) $$y'=3^{\cos^2x-2\cos x}\cdot\ln 3\cdot\left(\cos^2x-2\cos x\right)'=$$
$$=3^{\cos^2x-2\cos x}\cdot\ln 3(-2\cos x\cdot\sin x+2\sin x)=3^{\cos^2x-2\cos x}\cdot\ln 3\cdot 2\sin x(1-\cos x).$$

г) $$y'=\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)'=\frac{1}{2}\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}ctg\frac{x}{2}.$$

2. Вычислить производные функций:

Решение. а) Функцию $y=(3+2x^2)^4$ можно записать как сложную функцию в виде $y=u^4$, где $u=3+2x^2$. По правилу дифференцирования сложной функции получаем $y'=y'_u\cdot u'_x=4u^3\cdot u_x{}'=4(3+2x^2)^3\cdot(3+2x^2)'=16(3+2x^2)^3\cdot x$.

б) $y'=\dfrac{1}{\cos x^2}\cdot(\cos x^2)'=\dfrac{1}{\cos x^2}\cdot(-\sin x^2)\cdot(x^2)'=-\dfrac{\sin x^2}{\cos x^2}\cdot 2x=-\,tg\,x^2\cdot 2x.$

в) Данную функцию можно представить в виде $y=\arcsin u$, где $u=\sqrt{1-3x}$. Тогда $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u_x{}'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-3x)^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1-3x}}\cdot(-3)=\dfrac{-3}{2\sqrt{3x(1-3x)}}$.

г) $y'=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{1}{x+1}}\cdot\left(\dfrac{x}{x+1}\right)'=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{1}{x+1}}\cdot\dfrac{(x+1)-x}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2\cos^2\dfrac{x}{x+1}}.$

д) $y'=\cos(x^2+2)\cdot(x^2+2)'=2x\cos(x^2+2)$

е) $y'=(4^{\cos x})'\cdot arctg\,2x+4^{\cos x}\cdot(arctg\,2x)'=$

$=4^{\cos x}\ln 4\cdot(\cos x)'\cdot arctg\,2x+4^{\cos x}\cdot\dfrac{1}{1+(2x)^2}\cdot(2x)'=$

$=-4^{\cos x}\cdot\ln 4\cdot\sin x\cdot arctg\,2x+4^{\cos x}\cdot\dfrac{2}{1+4x^2}$.

Практическое занятие 8

Вычисление простейших определенных интегралов.

Определение максимума мощности в цепи постоянного тока с применением производной.

Вычисления площадей и объемов при проектировании объектов транспорта с применением определенного интеграла

Тема занятия: Нахождение производной сложной функции. Интегрирование функций. Метод замены переменной. Интегрирование по частям. Вычисление определённого интеграла. Приложение определенного интеграла к решению различных прикладных задач.

Цель: закрепление умений нахождения производной сложной функции; закрепление умений интегрирования функций методом замены переменной и методом интегрирования по частям; закрепление умений вычисления определённого интеграла.

1. Найти производную функции:

1) $y=4x+6\sqrt[3]{x}$; 2) $y=(x^2-1)(x^2-3)$;

3) $y=\dfrac{\sin x}{1+tgx}$; 4) $y=\cos^4 x-\sin^4 x$;

2. Найти интегралы, используя основные свойства интеграла:

$1)\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$ $\qquad$ $2)\int_1^4 (\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})dx$

3. Найти интегралы, используя метод замены переменной:

$1)\int e^{x+x^2}(1+2x)dx$ $\qquad$ $2)\int_1^{\sqrt{3}} \frac{32xdx}{(x^2+1)^5}$

4. Найти интеграл, используя метод интегрирования по частям:

$1)\int \ln xdx$ $\qquad$ $2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos xdx$

5. Найти интеграл: $\int \sin^3 xdx$

Тема 3.2 Обыкновенные дифференциальные уравнения
Практическое занятие № 9

Тема занятия: Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными.

Цель: закрепление умений решения дифференциальных уравнений

Проинтегрировать следующие уравнения

$1. (1+y^2)dx+xydy=0$ $\qquad$ $2. xy(1+x^2)y'=1+y^2$

$3. (1+y^2)dx=xdy$ $\qquad$ $4. (x+1)dy+xydx=0$

$5. \sqrt{y^2+1}dx=xydy$ $\qquad$ $6. 2x^2yy'+y^2=2$

$7. y'-xy^2=2xy$ $\qquad$ $8. y'-y=2x-3$

$9. y'=\frac{y}{x^2}$ $\qquad$ $10. (1+y^3)xdx-(1+x^2)y^2dy$

Найти частные решения удовлетворяющие заданным начальным условиям.

. $(x^2-1)y'+2xy^2=0$, $\qquad$ y = 1 при x = 0

2. $y'ctgx+y=2$, $\qquad$ y = - 1 при x = 0

3. $y'=3\sqrt[3]{x^2}$, $\qquad$ y = 2 при x = 0

4. $xy'+y=y^2$, $\qquad$ y = 0,5 при x = 1

5. $(x+2y)y'=1$, $\qquad$ y = - 1 при x = 0

6. $\frac{xdx}{1+y}-\frac{ydy}{1+x}=0$, $\qquad$ y = 1 при x = 1

7. $xy'=y\ln y$, $\qquad$ y = 1 при x = 0

8. $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$, $\qquad$ y = 1 при x = 0

9. $2\sqrt{y}dx=dy$, $\qquad$ y = 1 при x = 0

1. Решить уравнение: $(1+\cos x)yy' = (1+y^2)\sin x$.
2. Решить уравнение: $y' - y = x \cdot \cos x$.
3. Решить задачу Коши: $y'' - 9y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 2$.

Тема 3.4 Ряды
Практическое занятие №10

Решение упражнений на определение сходимости ряда.

Пример 1.1. Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots.$$

Решение. Общий член ряда можно представить в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1}.$$

Определим коэффициенты A и B:

$1 = A(2n+1) + B(2n-1)$;

при $n=\frac{1}{2}$: $1 = 2A \Rightarrow A=\frac{1}{2}$;

при $n=-\frac{1}{2}$: $1=-2B \Rightarrow B=-\frac{1}{2}$.

Таким образом, n–ый член ряда будет иметь следующий вид:

$$u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right),$$

откуда

$$u_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right), u_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right), u_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right), u_4=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right),\ldots.$$

Следовательно,

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$, то ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{2}$.

Ответ: $S=\frac{1}{2}$.

Пример 1.2. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots.$$

Решение. Данный ряд составлен из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и поэтому сходится. Найдем его сумму. Здесь $a=\frac{2}{3}$ (первый член прогрессии), $q=\frac{1}{2}$ (знаменатель прогрессии). Следовательно,

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{2/3}{1-1/2}=\frac{4}{3}.$$

Так как ряд имеет конечную сумму, то он сходится.

Ответ: ряд сходится, $S=\frac{4}{3}$.

Пример 1.3. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{3}{13}+\frac{6}{18}+\frac{9}{23}+\ldots+\frac{3n}{5n+8}+\ldots.$$

Решение. Так как

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{5n+8}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{5+8/n}=\frac{3}{5},$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится (не выполняется необходимый признак сходимости).

Ответ: расходится.

Пример 1.4. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{1}{n^2}$.

Решение. Воспользуемся необходимым признаком сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} n^2 \sin\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1.$$

Так как $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится (не выполняется необходимый признак сходимости).

Ответ: расходится.

Пример 1.5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$.

Решение. Члены данного ряда меньше соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ т.е. ряда $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$. Но последний ряд сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Следовательно, сходится и данный ряд (по первому признаку сравнения).

Ответ: сходится.

Пример 1.6. Исследовать сходимость ряда с общим членом $u_n = \frac{1}{4\cdot 2^n - 3}$.

Решение. Сравним этот ряд с рядом, у которого общий член $v_n = 1/2^n$ (т.е. с бесконечно убывающей геометрической прогрессией). Применим второй признак сравнения рядов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{4\cdot 2^n - 3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4-3/2^n} = \frac{1}{4}.$$

Так как предел конечен и отличен от нуля и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ сходится, то сходится и данный ряд.

Ответ: сходится.

Практическое занятие №11

Тема занятия: Разложение функций в ряд Фурье

Цель: расширение и закрепление теоретических знаний

1. Исследовать знакоположительный ряд на сходимость:

$1)\sum\frac{1}{(2n+1)!};\qquad 2)\sum\frac{arctgn^2}{n(n+1)(n+2)};$

2. Исследовать на сходимость (абсолютную и условную) знакочередующийся ряд:

$\sum(-1)^{n+1}\frac{n}{2n-1}.$

3. Найти область сходимости ряда:

$\sum n!x^n.$

4. разложить в ряд Маклорена функцию:

$f(x)=\cos\frac{x}{3}.$

5. Разложить в ряд Тейлора функцию по степени

$f(x)=\ln x, x_0=1.$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию в промежутке $-\pi<x<\pi$:

$f(x)=2x+3.$

7. Вычислить интеграл:

$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью до 0.0001.

Раздел 4. Элементы теории вероятностей и математической статистики
Тема 4.1.Вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей
Практическое занятие №12

Решение простейших задач на определение вероятности с использованием теоремы сложения вероятностей.

В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.

Решение: важнейшей предпосылкой для использования классического определения вероятности является **возможность подсчёта общего количества исходов**.

Всего в урне: 15 + 5 + 10 = 30 шаров, и, очевидно, справедливы следующие факты:

– извлечение любого шара одинаково возможно (***равновозможность*** *исходов)*, при этом исходы ***элементарны*** и образуют ***полную группу событий*** *(т.е. в результате испытания обязательно будет извлечён какой-то один из 30 шаров)*.

Таким образом, общее число исходов: $n = 30$

Рассмотрим событие: A – из урны будет извлечён белый шар. Данному событию благоприятствуют $m = 15$ элементарных исходов, поэтому по классическому определению:

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён белый шар.

Как ни странно, даже в такой простой задаче можно допустить серьёзную неточность, на которой я уже заострял внимание в первой статье по **теории вероятностей**. Где здесь подводный камень? Здесь некорректно рассуждать, что *«раз половина шаров белые, то вероятность извлечения белого шара* $P(A) = \frac{1}{2}$*»*. В классическом определении вероятности речь идёт об **ЭЛЕМЕНТАРНЫХ** исходах, и дробь $\frac{15}{30}$ следует обязательно прописать!

С другими пунктами аналогично, рассмотрим следующие события:

B – из урны будет извлечён красный шар;
C – из урны будет извлечён чёрный шар.

Событию B благоприятствует 5 элементарных исходов, а событию C – 10 элементарных исходов. Таким образом, соответствующие вероятности:

$P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6};$

$P(C) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$

Типичная проверка многих задач по терверу осуществляется с помощью **теоремы о сумме вероятностей событий, образующих полную группу**. В нашем случае события A, B, C образуют полную группу, а значит, сумма соответствующих вероятностей должна обязательно равняться единице: $P(A) + P(B) + P(C) = 1$.

Проверим, так ли это: $P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{6}{6} = 1$, в чём и хотелось убедиться.

Ответ: $а)\ \frac{1}{2},\quad б)\ \frac{1}{6},\quad в)\ \frac{1}{3}$

В принципе, ответ можно записать и подробнее, но лично я привык ставить туда только числа – по той причине, что когда начинаешь «штамповать» задачи сотнями и тысячами, то стремишься максимально сократить запись решения. К слову, о краткости: на практике распространён «скоростной» вариант оформления **решения**:

Всего: 15 + 5 + 10 = 30 шаров в урне. По классическому определению: $p_Б = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён белый шар; $p_К = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён красный шар; $p_Ч = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён чёрный шар.

Ответ: $а)\ \frac{1}{2},\quad б)\ \frac{1}{6},\quad в)\ \frac{1}{3}$

Однако если в условии несколько пунктов, то решение зачастую удобнее оформить первым способом, который отнимает чуть больше времени, но зато всё «раскладывает по полочкам» и позволяет легче сориентироваться в задаче.

Практическое занятие №13

Решение простейших задач на определение вероятности с использованием теорем сложения и умножения вероятностей.

Задача 2

В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

Выберите целесообразный вариант оформления и сверьтесь с образцом внизу страницы.

В простейших примерах количество общих и количество благоприятствующих исходов лежат на поверхности, но в большинстве случаев картошку приходится выкапывать самостоятельно. Каноничная серия задач о забывчивом абоненте:

Задача 3

Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что одна из них – ноль, а другая – нечётная. Найти вероятность того, что он наберёт правильный номер.

***Примечание**: ноль – это чётное число (делится на 2 без остатка)*

Решение: сначала найдём общее количество исходов. По условию, абонент помнит, что одна из цифр – ноль, а другая цифра – нечётная. Здесь рациональнее не мудрить с **комбинаторикой** и воспользоваться ***методом прямого перечисления исходов***. То есть, при оформлении решения просто записываем все возможные комбинации:
01, 03, 05, 07, 09
10, 30, 50, 70, 90

и подсчитываем их – всего: 10 исходов.

Благоприятствующий исход один: верный номер.

По классическому определению:

$p = \frac{1}{10} = 0{,}1$ – вероятность того, что абонент наберёт правильный номер

Ответ: 0,1

Тема 4.2 Случайная величина, ее функция распределения
Практическое занятие № 14
Тема занятия: По заданному условию построить ряд распределения случайной величины
Цель: формирование исследовательского подхода к решению задач
1. В урне 7 шаров, из которых 4 голубых, а остальные красные. Из этой урны извлекаются три шара. Найдите закон распределения дискретной случайной величины X, равной числу голубых шаров в выборке.
2. Найти функцию распределения F(x) и построить ее график.
Найти среднее квадратичное отклонение случайной величины X, заданной законом ее распределения:

X_i	1	2	3	4	5	6	7	8
P_i	0.3	0.2	0.1	0.1	0.2	0.01	0.08	0.01

Тема 4.3. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины
Практическое занятие № 15
Тема занятия: нахождение математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины заданной законом распределения
Цель работы: находить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины по заданному закону ее распределения;
Дано: п – порядковый номер варианта студента.
xiп – 10 п – 6 п – 2 пп + 1 п + 3 п + 5 п + 8
pi0,17 0,03 0,16 0,07 ? 0,4 0,04 0,01
Найти:
Вероятность того, что случайная величина X примет значение п + 1;
Составить закон распределения случайной величины X;
Математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины;
Найти числовые характеристики случайной величины “x”. Варианты:
Xi -3 4 5 7
pi 10a2-3a 15a2-5a 8a2-3a 17a2-4a-1
Xi -2 3 5 9
pi 5a2-3,5 3a2-2a-1,5 15a2-9a-2 4,5a-3,5
Xi 2 3 8 11
pi 41a2-20 23a2-16a 30a2-12a-6 6a2-32a+20
Xi 5 7 11 18

pi 10a2-4a-1 6a2-2 5a2-a-1 4a2-1
Xi 2 3 5 8
pi 15a2-3,5 6a-3a2-2,1 8a2-1,5 2a-0,9
6.
Xi 7 10 11 13
pi 70a2-6 5a2 20a2+12a-5,3 5a2-28a-8,7
Контрольные вопросы:
Назовите числовые характеристики дискретной случайной величины.
Запишите формулу нахождения математического ожидания.
Запишите формулу нахождения дисперсии и среднего квадратичного отклонения.

Раздел 5. Основные численные методы
Тема 5.1 Численное интегрирование
Практическое занятие № 16
Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона. Оценка погрешности

Пример 1. Вычислить по формуле прямоугольников $\int_2^5 x^2 dx$. Найти абсолютную и относительную погрешности вычислений.

Решение:

Разобьём отрезок [*a*, *b*] на несколько (например, на 6) равных частей. Тогда *a* = 0, *b* = 3

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{5-2}{6} = \frac{1}{2}$$
,

$x_k = a + k \cdot \Delta x$

$x_0 = 2 + 0 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$x_1 = 2 + 1 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5$

$x_2 = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} =3$

$x_3 = 2 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$

$x_4 = 2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 4$

$x_5 = 2 + 5 \cdot \frac{1}{2} = 4{,}5$

$(x_0) = 2^2 = 4$
$f(x_1) = 2{,}5^2 = 6{,}25$
$f(x_2) = 3^2 = 9$
$f(x_3) = 3{,}5^2 = 12{,}25$
$f(x_4) = 4^2 = 16$
$f(x_5) = 4{,}5^2 = 20{,}25$.

x	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y	4	6,25	9	12,25	16	20,25

По формуле (1):

$$\int_0^3 x^2dx \approx \frac{1}{2}\cdot(4+6{,}25+9+12{,}25+16+20{,}25)=\frac{1}{2}\cdot 67{,}75=33{,}875$$

Для того, чтобы вычислить относительную погрешность вычислений, надо найти точное значение интеграла:

$$\int_2^5 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_2^5=\frac{5^3}{3}-\frac{2^3}{3}=\frac{125}{3}-\frac{8}{3}=39$$

$$\Delta=|39-33{,}875|=5{,}125$$

$$\delta=\frac{5{,}125}{39}\cdot 100\%\approx 13{,}14\%$$

Вычисления проходили долго и мы получили довольно-таки грубое округление. Чтобы вычислить этот интеграл с меньшим приближением, можно воспользоваться техническими возможностями компьютера.

Для нахождения определённого интеграла методом прямоугольников необходимо ввести значения подынтегральной функции *f(x)* в рабочую таблицу Excel в диапазоне *x* ∈ [2 ;5] с заданным шагом Δx = 0,1.

1. Открываем чистый рабочий лист.
2. Составляем таблицу данных *(x* и *f(x)).* Пусть первый столбец будет значениями *x*, а второй соответствующими показателями *f(x).* Для этого в ячейку A1 вводим слово *Аргумент*, а в ячейку B1 – слово *Функция*. В ячейку A2 вводится первое значение аргумента – левая граница диапазона (*2*). В ячейку A3 вводится второе значение аргумента – левая граница диапазона плюс шаг построения (*2,1*). Затем, выделив блок ячеек A2:A3, автозаполнением получаем все значения аргумента (за правый нижний угол блока протягиваем до ячейки A32, до значения *x=5*).
3. Далее вводим значения подынтегральной функции. В ячейку B2 необходимо записать её уравнение. Для этого табличный курсор необходимо установить в ячейку B2 и с клавиатуры ввести формулу *=A2^2* (при английской раскладке клавиатуры). Нажимаем клавишу *Enter*. В ячейке B2 появляется *4*. Теперь необходимо скопировать функцию из ячейки B2. Автозаполнением копируем эту формулу в диапазон B2:B32.
В результате должна быть получена таблица данных для нахождения интеграла.
4. Теперь в ячейке B33 может быть найдено приближённое значение интеграла. Для этого в ячейку B33 вводим формулу *= 0,1*,* затем вызываем Мастер функций (нажатием на панели инструментов кнопки Вставка функции *(f(x))*. В появившемся диалоговом окне Мастер функции-шаг 1 из 2 слева в поле Категория выбираем Математические. Справа в поле Функция - функцию Сумм. Нажимаем кнопку *ОК.* Появляется диалоговое окно Сумм. В рабочее поле мышью вводим диапазон суммирования B2:B31. Нажимаем кнопку *ОК.* В ячейке B33 появляется приближённое значение искомого интеграла с недостатком (*37,955*) .

Сравнивая полученное приближённое значение с истинным значением интеграла (*39*), можно видеть, что ошибка приближения метода прямоугольников в данном случае равна

Δ= |39 - 37 , 955| = 1 ,045

$$\delta=\frac{1{,}045}{39}\cdot 100\%=0{,}02679\cdot 100\%\approx 2{,}68\%.$$

Пример 2. Используя метод прямоугольников, вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$ с заданным шагом Δx = 0,05.

Решение:

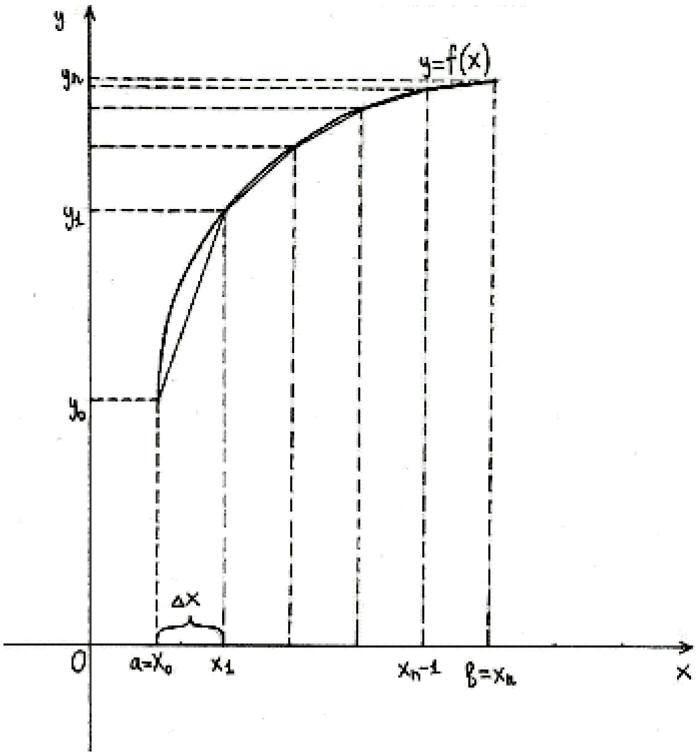
1. Для нахождения определённого интеграла значения подынтегральной функции *f(x)* должны быть введены в рабочую таблицу *Excel* в диапазоне $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ с заданным шагом Δx = 0,05. В созданную уже таблицу данных в ячейку А2 вводится левая граница интегрирования (*0*). В ячейку А3 вводится второе значение аргумента – левая граница диапазона плюс шаг построения (*0,05*). Затем, выделив блок ячеек А2:А3, автозаполнением получаем все значения аргумента (за правый нижний угол блока протягиваем до ячейки А33, до значения *x=1,55*).
2. Далее вводим значения подынтегральной функции. В ячейку В2 необходимо записать её уравнение. Для этого табличный курсор необходимо установить в ячейку В2. Здесь должно оказаться значение косинуса, соответствующее значению аргумента в ячейке А2. Для получения значения косинуса воспользуемся специальной функцией: нажимаем на панели инструментов кнопку Вставка функции (f_x) . В появившемся диалоговом окне Мастер функции-шаг 1 из 2 слева в поле Категория выбираем Математические. Справа в поле Функция - функцию *COS*. Нажимаем кнопку *ОК.* Появляется диалоговое окно *COS*. Наведя указатель мыши на серое поле окна, при нажатой левой кнопке сдвигаем поле вправо, чтобы открыть столбец данных (*А*). Указываем значение аргумента косинуса щелчком мыши на ячейке А2. Нажимаем кнопку *ОК.* В ячейке В2 появляется *1*. Теперь необходимо скопировать функцию из ячейки В2. Автозаполнением копируем эту формулу в диапазон В2:В33. В результате должна быть получена таблица данных для нахождения интеграла.
3. Теперь в ячейке В34 может быть найдено приближённое значение интеграла. Для этого в ячейку В34 вводим формулу *= 0,05*,* затем вызываем Мастер функций (нажатием на панели инструментов кнопки Вставка функции ((f_x)) . В появившемся диалоговом окне Мастер функции-шаг 1 из 2 слева в поле Категория выбираем Математические. Справа в поле Функция - функцию Сумм. Нажимаем кнопку *ОК.* Появляется диалоговое окно Сумм. В рабочее поле мышью вводим диапазон суммирования В2:В32. Нажимаем кнопку *ОК.* В ячейке В34 появляется приближённое значение искомого интеграла с избытком (*1,024056*).

Сравнивая полученное приближённое значение с истинным значением интеграла $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1\right)$, можно видеть, что ошибка приближения метода прямоугольников в данном случае равна

$$\Delta = |1{,}024056 - 1| = 0{,}024056$$

$$\delta = \frac{0{,}024056}{1} \cdot 100\% \approx 2{,}41\%$$

Метод трапеций обычно даёт более точное значение интеграла, чем метод прямоугольников. Криволинейная трапеция заменяется на сумму нескольких трапеций и приближённое значение определённого интеграла находится как сумма площадей трапеций



$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right)$$

[Рисунок3]

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right)$$

Пример 3. Методом трапеций найти $\int_0^{\pi} \sin x dx$ с шагом Δx = 0,1.

Решение.

1. Открываем чистый рабочий лист.
2. Составляем таблицу данных *(x* и *f(x)).* Пусть первый столбец будет значениями *x*, а второй соответствующими показателями *f(x).* Для этого в ячейку А1 вводим слово *Аргумент*, а в ячейку В1 – слово *Функция*. В ячейку А2 вводится первое значение аргумента – левая граница диапазона (*0*). В ячейку А3 вводится второе значение аргумента – левая граница диапазона плюс шаг построения (*0,1*). Затем, выделив блок ячеек А2:А3, автозаполнением получаем все значения аргумента (за правый нижний угол блока протягиваем до ячейки А33, до значения *x=3,1*).
3. Далее вводим значения подынтегральной функции. В ячейку В2 необходимо записать её уравнение (в примере синуса). Для этого табличный курсор необходимо установить в ячейку В2. Здесь должно оказаться значение синуса, соответствующее значению аргумента в ячейке А2. Для получения значения синуса воспользуемся специальной функцией: нажимаем на панели инструментов кнопку Вставка функции *f(x)*. В появившемся диалоговом окне Мастер функции-шаг 1 из 2 слева в поле Категория выбираем Математические. Справа в поле Функция - функцию *SIN*. Нажимаем кнопку *ОК.* Появляется диалоговое окно *SIN*. Наведя указатель мыши на серое поле окна, при нажатой левой кнопке сдвигаем поле вправо, чтобы открыть столбец данных (*А*). Указываем значение аргумента синуса щелчком мыши на ячейке А2. Нажимаем кнопку *ОК.* В ячейке В2 появляется 0. Теперь необходимо скопировать функцию из ячейки В2. Автозаполнением копируем эту формулу в диапазон В2:В33. В результате должна быть получена таблица данных для нахождения интеграла.

4. Теперь в ячейке В34 может быть найдено приближённое значение интеграла по методу трапеций. Для этого в ячейку В34 вводим формулу = *0,1*((B2+B33)/2+,* затем вызываем Мастер функций (нажатием на панели инструментов кнопки Вставка функции *(f(x))*. В появившемся диалоговом окне Мастер функции-шаг 1 из 2 слева в поле Категория выбираем Математические. Справа в поле Функция - функцию Сумм. Нажимаем кнопку *ОК.* Появляется диалоговое окно Сумм. В рабочее поле мышью вводим диапазон суммирования В3:В32. Нажимаем кнопку *ОК* и ещё раз *ОК.* В ячейке В34 появляется приближённое значение искомого интеграла с недостатком (*1,997*) .

Сравнивая полученное приближённое значение с истинным значением интеграла $\left(\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (\cos 0) = -(-1) + 1 = 2\right)$, можно видеть, что ошибка приближения метода прямоугольников в данном случае вполне приемлемая для практики.

$$\Delta = |1{,}997 - 2| = |-0{,}003| = 0{,}003$$

$$\delta = \frac{0{,}003}{2} \cdot 100\% = 0{,}0015 \cdot 100\% = 0{,}15\%$$

1. **Решение упражнений.**

III. Вычислить $\int_0^2 e^x dx$ методом прямоугольников, разделив отрезок [0;1] на 20 равных частей.

Ответ: $I \approx 6{,}02344, \ \Delta = 0{,}26656, \quad \delta = 4{,}24\%$.

IV. Вычислить методом трапеций $\int_1^{1{,}5} \frac{dx}{x}$ при $\Delta x = 0{,}1$.

V. Вычислить методом трапеций $\int_0^2 xdx$ при $\Delta x = 0{,}1$.

VI. Вычислить методом трапеций $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$ при $\Delta x = 0{,}25$.

VII. Вычислить $\int_0^4 (3x^2 + 4x + 2)dx$, разделив отрезок [0;4] на 40 равных частей.

VIII. Вычислить $\int_0^8 \frac{dx}{x+1}$, разделив отрезок [0;8] на 40 равных частей.

IX. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgxdx$, при $\Delta x = 0{,}2$.

Тема 5.2 Численное дифференцирование

Практическое занятие № 17

Тема занятия: Решение задач на нахождение по таблично заданной функции (при n = 2), функции, заданной аналитически

Цель: расширение и закрепление теоретических знаний

Найти $y'(1)$ *и* $y''(1)$ для функции *y* (*x*), заданной таблицей

x	- 3	- 1	0	2	3	4

y	5	2	- 4	- 1	6	5

7. Промежуточная аттестация.

Промежуточная аттестация по учебной дисциплине «Математика» проводится в форме экзамена (3 семестр).

К промежуточной аттестации по учебной дисциплине допускаются все студенты. При явке на промежуточную аттестацию студентам необходимо иметь зачетную книжку. По результатам всех видов оценочной деятельности студенту выставляется отметка по учебной дисциплине. Шкала оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Студенты, не прошедшие промежуточную аттестацию в установленное время по уважительной причине, подтвержденной документально соответствующим документом, сдают её индивидуально, в установленные сроки .

Вопросы для экзамена (3 семестр)

Вопросы для проверки уровня обученности «ЗНАТЬ»

1. Определение комплексных чисел. Основные формы комплексных чисел. Геометрическая интерпретация комплексных чисел
2. Действия с комплексными числами, представленными в различных формах. Переход от алгебраической формы к тригонометрической и обратно
3. Множество и его элементы. Пустое множество, подмножества некоторого множества.
4. Операции над множествами. Отображение множеств. Понятие функции и способы ее задания, композиция функций.
5. Отношения, их виды и свойства. Диаграмма Венна. Числовые множества
6. Определение графа, виды графов: полные, неполные. Элементы графа: вершины, ребра; степень вершины. Цикл в графе. Связанные графы
7. Функции одной независимой переменной. Пределы. Непрерывность функций
8. Производная, геометрический смысл. Исследование функций
9. Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование. Замена переменной
10. Функции нескольких переменных. Приложения интеграла к решению прикладных задач. Частные производные
11. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
12. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Общие и частные решения.
13. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
14. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами
15. Числовые ряды. Сходимость и расходимость числовых рядов.
16. Признак сходимости Даламбера. Признак сходимости Коши
17. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости рядов.
18. Признак Лейбница. Степенные ряды. Ряды Фурье
19. Понятие события и вероятности события. Достоверные и невозможные события. Классическое определение вероятности.
20. Теорема сложения вероятностей. Теорема умножения вероятностей
21. Случайная величина. Дискретная и непрерывная случайные величины.
22. Закон распределения случайной величины
23. Математическое ожидание дискретной случайной величины. Дисперсия случайной величины.
24. Формулы прямоугольников. Формула трапеций. Формула Симпсона.
25. Численное дифференцирование. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на интерполяционных формулах Ньютона.

26. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений
27. Определение комплексных чисел.
28. Основные формы комплексных чисел.
29. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.
30. Формула корней квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом.
31. Действия над комплексными числами, представленными в различных формах.
32. Переход от алгебраической формы к тригонометрической и обратно.
33. Производная функции, ее геометрический и физический смысл.
34. Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование. Замена переменной.
35. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
36. Общие и частные решения. Порядок дифференциального уравнения.
37. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
38. Линейные однородные уравнения первого порядка.
39. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
40. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами
41. Числовые ряды. Сходимость и расходимость числовых рядов.
42. Признаки сходимости: первый и второй признаки сравнения.
43. Признак сходимости Д`Аламбера. Признак сходимости Коши.
44. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости рядов.
45. Признак Лейбница.
46. Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда.
47. Ряды Фурье.
48. Основные комбинаторные конфигурации: сочетание, размещение и перестановки (с повторениями и без повторений).
49. Основные правила комбинаторики.
50. Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов.
51. Понятие события и вероятности события. Достоверные и невозможные события. Совместные и несовместные события.
52. Классическое определение вероятности.
53. Теоремы сложения вероятностей.
54. Теоремы умножения вероятностей.
55. Формула полной вероятности и формула Байеса.
56. Повторение испытаний. Формула Бернулли.
57. Формулы прямоугольников. Формула трапеций. Формула Симпсона.
58. Численное дифференцирование. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на интерполяционных формулах Ньютона.
59. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Вопросы для проверки уровня обученности «УМЕТЬ»

1. Применять математические методы для решения профессиональных задач
2. Решать прикладные электротехнические задачи методом комплексных чисел
3. Определять максимум мощности в цепи постоянного тока с применением производной
5. Вычислять простейшие определенные интегралы
6. Вычислять площади и объемы при проектировании объектов транспорта с применением определенного интеграла
7. Выполнять разложение функций в ряд Фурье;
8. Производить расчет электрических цепей несинусоидальных периодических токов с использованием рядов Фурье
9. Решать задачи на нахождение математического ожидания и дисперсии при оценке эффективности заказов и обслуживания потребителей услуг и при оценке систем надежности, безопасности и качества услуг на железнодорожном транспорте

10. Выполнять действия над комплексными числами, представленными в разных формах
11. Находить производную функции, вычислять интегралы методом непосредственного интегрирования и методом замены
12.Решать обыкновенные дифференциальные уравнения
13. Исследовать ряд на сходимость, раскладывать функцию в ряд Тейлора
14. Выполнять разложение функций в ряд Фурье
15. Решать простейшие комбинаторные задачи
16. Решать задачи на нахождение вероятности события
17. Решать задачи на нахождение математического ожидания и дисперсии

Оценка освоения учебной дисциплины

Текущая аттестация студентов.

Критерии оценки

«отлично» - студент полно раскрыл содержание материала в объеме, предусмотренном программой и учебником, изложил материал грамотным языком в определенной логической последовательности, точно используя математическую терминологию и символику; правильно выполнил рисунки, чертежи, графики, сопутствующие ответу; показал умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами, применять их в новой ситуации при выполнении практического задания; продемонстрировал сформированность и устойчивость используемых при отработке умений и навыков, усвоение ранее изученных сопутствующих вопросов;

отвечал самостоятельно без наводящих вопросов учителя. Возможны одна - две неточности при освещении второстепенных вопросов или в выкладках, которые студент легко исправил по замечанию преподавателя

«хорошо» - ответ удовлетворяет в основном требованиям на оценку «5», но при том имеет один из недостатков: в изложении допущены небольшие пробелы, не исказившие математическое содержание ответа; допущены один – два недочета при освещении основного содержания ответа, исправленные по замечанию преподавателя; допущены ошибка или более двух недочетов при освещении второстепенных вопросов или в выкладках

«удовлетворительно» - неполно или непоследовательно раскрыто содержание материала, но показано общее понимание вопроса и продемонстрированы умения, достаточные для дальнейшего усвоения программного; имелись затруднения или допущены ошибки в определении понятий, использовании математической терминологии, чертежах, выкладках, исправленные после нескольких наводящих вопросов

«неудовлетворительно» - ставится, когда у студента имеются отдельные представления об изученном материале, но все же большая часть материала не усвоена

3.2. Самостоятельная работа

Критерии оценки

«отлично»- задание выполнено в полном объёме на 100%, материал полностью соответствует теме, изложение чёткое, ответы на вопросы исчерпывающие.

«хорошо»- задание выполнено на 70%, изложение неточное, студент затрудняется при ответах на вопросы.

«удовлетворительно»- задание выполнено на 40-50%, изложение материала вызывает затруднение, ответы на вопросы затруднённые или отсутствуют.

«неудовлетворительно»- задание не выполнено в полном объёме.

3.3. Практические занятия

Критерии оценки

«отлично» - работа выполнена полностью; в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок; в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала)

«хорошо» - работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки); допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки)

«удовлетворительно» - допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме

«неудовлетворительно» - допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

3.4. Промежуточная аттестация студентов

«отлично» - ставится при правильном решении задач и правильном ответе на два вопроса из разных разделов, а так же при ответе на дополнительные вопросы;

«хорошо» - ставится при правильном решении задач и правильном ответе на два вопроса без дополнительных вопросов;

«удовлетворительно» - ставится при правильном ответе на вопрос и правильном решении задачи;

«неудовлетворительно»- при правильном решении задачи и отсутствии ответа на вопросы.

4. Текущая аттестация студентов.

Текущая аттестация по учебной дисциплине «Математика» проводится в форме контрольных мероприятий (*устный опрос, контрольные работы и пр.*), оценивание фактических результатов обучения студентов осуществляется преподавателем.

Объектами оценивания выступают:

– учебная дисциплина (активность на занятиях, своевременность выполнения различных видов заданий, посещаемость всех видов занятий по аттестуемой дисциплине);
– степень усвоения теоретических знаний;
– уровень овладения практическими умениями и навыками по всем видам учебной работы;
– результаты самостоятельной работы.

Активность студента на занятиях оценивается на основе выполненных студентом работ и заданий, предусмотренных данной рабочей программой учебной дисциплины.

4.1. Задания для текущей аттестации.

Раздел 1. **Комплексные числа**

Тема 1.1 Решение систем уравнений Гаусса.

1. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
2. Матрицы и определители. Элементарные преобразования матрицы
3.Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.
4.Матрицы и определители. Элементарные преобразования матрицы.
5.Решение систем линейных уравнений матричным способом (метод обратной матрицы)
6.Применение различных методов решения систем линейных уравнений в задачах в области профессиональной деятельности

Тема 1.2 Основные формы комплексных чисел

Вопросы для устных (письменных) опросов:

1. Алгебраическая форма комплексного числа
2. Тригонометрическая форма комплексного числа
3. Показательная форма комплексного числа
4. Модуль комплексного числа
5. Сопряженные числа
6. Аргумент комплексного числа
7. Степень числа ***i***
8. Геометрический смысл комплексного числа

Тема 1.3 Действия над комплексными числами

Вопросы для устных (письменных) опросов:

1. Действия над комплексными числами в алгебраической форме
2. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме
3. Действия над комплексными числами в показательной форме

Раздел 2. Основы дискретной математики

Тема 2.1 Основы теории множеств

Вопросы для устных (письменных) опросов:

1. Понятие множества
2. Понятие подмножества
3. Операции над множествами
4. Законы алгебры множеств
5. Определение диаграмм Венна-Эйлера
6. Понятие декартова произведения множеств
7. Понятие бинарного отношения
8. Понятие отношения эквивалентности

Тема 2.2 Основы теории графов

Вопросы для устных (письменных) опросов:

1. Неориентированный граф
2. Изоморфность двух графов
3. Степень вершины графа
4. Связный граф
5. Плоский граф
6. Эйлеров цикл в графе
7. Гамильтонов цикл в графе
8. Способы задания графов
9. Ориентированный граф

Раздел 3. Основы математического анализа
Тема 3. 1 Дифференциальное и интегральное исчисление
Вопросы для устных (письменных) опросов:
1. Предел функции в точке
2. Производная функция в точке
3. Основные формулы дифференцирования
4. Производная сложной функции
5. Геометрический и физический смысл производной
6. Неопределенный интеграл
7. Таблица интегралов
8. Определенный интеграл

Тема 3.2 Дифференциальные уравнения
Вопросы для устных (письменных) опросов:
1. Дифференциальное уравнение
2. Общее и частное решение дифференциального уравнения
3. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными
4. Линейное дифференциальное уравнение 1 порядка
5. Однородное дифференциальное уравнение 1 порядка
6. Линейное дифференциальное уравнение 2 порядка

Тема 3.3 Дифференциальные уравнения в частных производных
Вопросы для устных (письменных) опросов:
1. Дифференциальные уравнения в частных производных.
2. Применение дифференциальных уравнений в частных производных при решении профессиональных задач

Тема 3.4 Ряды
Вопросы для устных (письменных) опросов:
1. Определение ряда
2. Частичные суммы ряда
3. Необходимый признак сходимости ряда
4. Достаточные признаки сходимости ряда
5. Знакочередующийся ряд
6. Абсолютная и условная сходимость
7. Степенной ряд
8. Область сходимости степенного ряда
9. Ряд Тейлора и ряд Маклорена
10. Ряд Фурье

Раздел 4. Элементы теории вероятностей и математической статистики
Тема 4.1 Вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Вопросы для устных (письменных) опросов:
1.Классификация событий
2. Классическое определение вероятности
3. Теоремы сложения и умножения вероятностей
4. Формула полной вероятности
5. Формула Байеса

Тема 4.2 Случайная величина, ее функция распределения
Вопросы для устных (письменных) опросов:
1. Дискретная случайная величина
2. Составить закон распределения случайной величины
3. Функция распределения F(x), ее график.

Тема 4.3 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины
Вопросы для устных (письменных) опросов:
1. Математическое ожидание случайной величины
2. Дисперсия, среднее квадратическое отклонение

Раздел 5. Основные численные методы
Тема 5.1 Численное интегрирование. Вычисление определенных интегралов
Вопросы для устных (письменных) опросов:
1.Вычисление приближенного значения интеграла с помощью формулы прямоугольников
2. Вычисление приближенного значения интеграла с помощью формулы трапеций
3. Вычисление приближенного значения интеграла с помощью формулы Симпсона
Тема 5.2 Численное дифференцирование
Вопросы для устных (письменных) опросов:
1. Численное дифференцирование
2. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на интерполяционных формулах Ньютона
3. Погрешность в определении производной

5. Самостоятельная работа студентов

Самостоятельная работа включает в себя подготовку докладов с презентацией, работа с дополнительной литературой и ответы на вопросы.

Раздел 1. Комплексные числа
Тема 1.1 Решение систем уравнений Гаусса.

Выполнение тренировочных заданий: «Матрицы и определители. Элементарные преобразования матрицы. Решение систем линейных уравнений матричным способом (метод обратной матрицы) Применение различных методов решения систем линейных уравнений в задачах в области профессиональной деятельности»
Тема 1.2 Основные формы комплексных чисел
Темы докладов или презентаций:
«Комплексные числа», «Основные формы комплексных чисел: алгебраическая, тригонометрическая, показательная», «Геометрическая интерпретация комплексных чисел»..
Тема 1.3 Действия над комплексными числами
Выполнение тренировочных и зачетных заданий по теме: « Прикладное применение комплексных чисел при анализе процессов в электрических цепях устройств ЖАТ»

Раздел 2. Основы дискретной математики
Тема 2.1 Основы теории множеств

Темы докладов или презентаций:
«Георг Кантор – основоположник теории бесконечности», «Парадокс Рассела»
Проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы (по вопросам к разделам и главам учебной литературы, а также составленных преподавателем). Решение вариативных задач и упражнений.

Тема 2.2 Основы теории графов
Темы докладов или презентаций:
«Леонард Эйлер», «Применение теории графов при решении профессиональных задач в экономике и логистике», «Построение графа по условию ситуационных задач: в управлении инфраструктурами на транспорте; в структуре взаимодействия различных видов транспорта, в формировании технологического цикла оказания услуг на транспорте»

Раздел 3. Основы математического анализа
Тема 3. 1 Дифференциальное и интегральное исчисление
Темы докладов или презентаций:
«Развитие интегрального исчисления», «Определение максимума мощности в цепи постоянного тока с применением производной»,
«Вычисления площадей и объемов при проектировании объектов транспорта с применением определенного интеграла»
Систематическая проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы. Поиск, анализ и оценка информации (профессиональные базы данных, ресурсы сети Интернет) по содержанию учебного материала и определению профессионально значимых задач. Подготовка сообщений или презентаций
Тема 3. 2 Дифференциальные уравнения
Темы докладов или презентаций:
«Дифференциальные уравнения первого и второго порядка», «Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными», «Однородные уравнения первого порядка», «Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами», «Применение обыкновенных дифференциальных уравнений при решении профессиональных задач».
Тема 3.3 Дифференциальные уравнения в частных производных
Проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы (по вопросам к разделам и главам учебных изданий, а также составленных преподавателем), поиск, анализ и оценка дополнительной информации по содержанию учебного материала и определению профессионально значимых задач
Тема 3.4 Ряды
Решение ситуационных и производственных (профессиональных) задач, определение способов выполнения профессиональных задач, оценка их эффективности и качества

Раздел 4. Элементы теории вероятностей и математической статистики
Тема 4.1 Вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей
Темы докладов или презентаций:
«Комбинаторные задачи», «Треугольник Паскаля», «История теории вероятностей», «Вероятность и ДНК», «Решение задач на нахождение вероятности события при изучении и планировании рынка услуг на транспорте»
Тема 4.2 Случайная величина, ее функция распределения
Решение ситуационных и производственных (профессиональных) задач, определение способов, выполнения профессиональных задач, оценка их эффективности и качества.

Тема 4.3 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины

Темы докладов или презентаций:
«Вероятность и статистика в медицине», «Решение задач на нахождение математического ожидания и дисперсии при оценке эффективности заказов и обслуживания потребителей услуг и при оценке систем надежности, безопасности и качества услуг на железнодорожном транспорте»
Проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы (по вопросам к разделам и главам учебной литературы, а также составленных преподавателем).

Раздел 5. Основные численные методы
Тема 5.1 Численное интегрирование. Вычисление определенных интегралов
Проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы (по вопросам к разделам и главам учебной литературы, а также составленных преподавателем). Определение метода и способа выполнения профессиональных задач, оценка их эффективности и качества

Тема 5.2 Численное дифференцирование
Проработка конспектов занятий, учебных изданий и дополнительной литературы (по вопросам к разделам и главам учебных изданий, а также составленных преподавателем). Определение метода и способа выполнения профессиональных задач, оценка их эффективности и качества.

6. Задания на практические занятия

Раздел 1.

Практическое занятие № 1

Тема 1.1 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Тема: Система *m* линейных уравнений с *n* переменными. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Цель: отработать навыки решения систем линейных уравнений методом Гаусса.

Материальное обеспечение: практическая работа, программное обеспечение.

Общие теоретические положения

Наиболее распространенным точным методом решения системы линейных уравнений является метод Гаусса. Сущность этого метода состоит в том, что посредством последовательных исключений неизвестных данная система превращается в ступенчатую (в частности, треугольную) систему.

Пусть дана произвольная система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \qquad (1)$$

Будем производить над ней элементарные преобразования. Для этого выпишем матрицу из коэффициентов при неизвестных системы (1) с добавлением столбца свободных членов, другими словами **расширенную матрицу** $\bar{A}$ для системы (1):

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix} \quad (2).$$

$$a_{s1} \quad a_{s2} \quad \ldots \quad a_{sn} \quad b_s$$

Предположим, что с помощью таких преобразований удалось привести матрицу $\bar{A}$ к виду:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & \cdots & b_{1n} & c_1 \\ & b_{22} & \cdots & b_{2r} & \cdots & b_{2n} & c_2 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & b_{rr} & \cdots & b_{rn} & c_r \end{pmatrix} \quad (r \le n), \quad (3),$$

где все диагональные элементы $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{rr}$отличны от нуля, а элементы, расположенные ниже диагональных, равны нулю. Матрице (3) соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1r}x_r + \ldots + b_{1n}x_n = c_1, \\ b_{22}x_2 + \ldots + b_{2r}x_r + \ldots + b_{2n}x_n = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{rr}x_r + \ldots + b_{rn}x_n = c_r, \end{cases} \quad (4),$$

которая получается из системы (1) с помощью некоторого числа элементарных преобразований и, следовательно, равносильна системе (1). Если в системе (4) $r=n$, то из последнего уравнения , имеющего вид $b_{nn}x_n=c_n$(где $b_{nn}\neq 0$), находим единственное значение x_n, из предпоследнего уравнения – значение x_{n-1} (поскольку x_n уже известно) и т.д., наконец, из первого уравнения – значение x_1. Итак, в случае)$r=n$ система имеет единственное решение. Если же $r<n$, то система (4) легко приводится к системе вида:

$$\begin{cases} x_1=\alpha_{1,\,r+1}x_{r+1}+\ldots+\alpha_{1n}x_n+\beta_1, \\ x_2=\alpha_{2,\,r+1}x_{r+1}+\ldots+\alpha_{2n}x_n+\beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r=\alpha_{r,\,r+1}x_{r+1}+\ldots+\alpha_{rn}x_n+\beta_r. \end{cases} \quad r<n, \ (5),$$

которая и является по существу **общим решением** системы (1).

Неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ называются **свободными**. Из системы (5) можно будет найти значения $x_1,\ldots, x_r$.

Приведение матрицы $\bar{A}$ к виду (3) возможно только в том случае, когда исходная система уравнений (1) совместна. Если же система (1) несовместна, то такое приведение невозможно. Это обстоятельство выражается в том, что в процессе преобразований матрицы $\bar{A}$ в ней появляется строка, в которой все элементы равны нулю, кроме последнего. Такая строка соответствует уравнению вида:

$$0*x_1+0*x_2+\ldots+0*x_n=b,$$

которому не удовлетворяют никакие значения неизвестных, так как $b\neq 0$. В этом случае система несовместна.

В процессе приведения системы (1) к ступенчатому виду могут получаться уравнения вида 0=0. Их можно отбрасывать, так как это приводит к системе уравнений, эквивалентных прежней.

При решении системы линейных уравнений методом Гаусса удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а расширенную матрицу этой системы, выполняя все преобразования над её строками. Последовательно получающиеся в ходе преобразований матрицы обычно соединяют знаком эквивалентности.

Решим следующую систему уравнений с 4-мя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3+x_4=20, \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=11, \\ 2x_1+10x_2+9x_3+7x_4=40, \\ 3x_1+8x_2+9x_3+2x_4=37. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу из коэффициентов при неизвестных с добавлением столбца свободных членов.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 & 20 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 10 & 9 & 7 & 40 \\ 3 & 8 & 9 & 2 & 37 \end{pmatrix}$$

Произведём анализ строк расширенной матрицы:

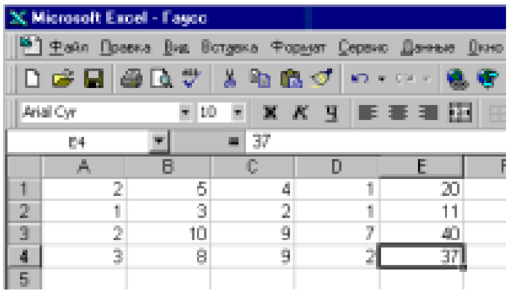
– к элементам 2-ой строки прибавим элементы 1-ой, делённые на (-2);

– из 3-ей строки вычтем 1-ю строку;

– к 4-ой строке прибавим 1-ю, умноженную на (-3/2).

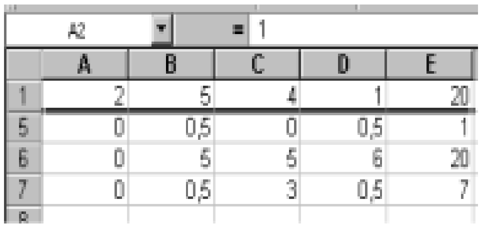
В качестве вычислительного средства воспользуемся инструментами программы *табличный редактор*.

1. Включите компьютер.
2. Подождите пока загрузится операционная система *Windows*, после чего *откройте окно табличного редактора*.
3. *Заполните ячейки* таблицы значениями расширенной матрицы (рисунок 1)



	A	B	C	D	E
1	2	5	4	1	20
2	1	3	2	1	11
3	2	10	9	7	40
4	3	8	9	2	37

Рисунок 1

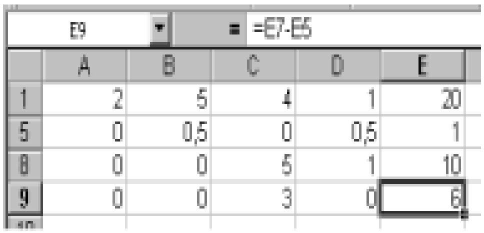


	A	B	C	D	E
1	2	5	4	1	20
5	0	0,5	0	0,5	1
6	0	5	5	6	20
7	0	0,5	3	0,5	7

Рисунок 2

4. Для выполнения выбранного словесного алгоритма производим следующие действия.
   - *Активизируйте ячейку* A5 и с клавиатуры занесите в неё формулу вида =A2+A1/(-2), после чего *автозаполнением* занесите численные результаты в ячейки B5÷E5;
   - В ячейке A6 разместим результат вычитания 1-ой строки из 3-ей, и снова, пользуясь *автозаполнением*, заполним ячейки B6÷E6;
   - в ячейке A7 запишем формулу вида =A4+A1*(-3/2) и *автозаполнением* занесём численные результаты в ячейки B7÷E7.
   - Далее *скроем* 2, 3 и 4 – строки, которые нам уже не нужны. Для этого воспользуемся пунктом меню ФОРМАТ→СТРОКА→СКРЫТЬ. Результат показан на рисунок 2.
5. Снова произведём анализ строк получившихся в результате элементарных преобразований матрицы, чтобы привести её к треугольному виду.
   - К 6-ой строке прибавим 5-ю, умноженную на число (-10);
   - из 7-ой строки вычтем 5-ю.

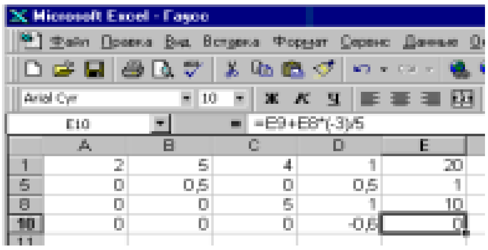
Записанный алгоритм реализуем в ячейках A8, A9, после чего *скроем* 6 и 7 – строки (см. рисунок 3).



E9 = =E7-E5

	A	B	C	D	E
1	2	5	4	1	20
5	0	0,5	0	0,5	1
8	0	0	5	1	10
9	0	0	3	0	6

Рисунок 3



E10 = =E9+E8*(-3)/5

	A	B	C	D	E
1	2	5	4	1	20
5	0	0,5	0	0,5	1
8	0	0	5	1	10
10	0	0	0	-0,6	0

Рисунок 4

6. И последнее, что нужно сделать, чтобы привести матрицу к треугольному виду – это к 9-ой строке прибавить 8-ю, умноженную на (-3/5), после чего *скрыть* 9-ю строку (рисунок 4).

Как вы можете видеть, элементы получившейся матрицы находятся в 1, 5, 8 и 10 строках, при этом ранг получившейся матрицы **r** = 4, следовательно, данная система уравнений имеет единственное решение. Выпишем получившуюся систему:

$$2x_1+5x_2+4x_3+x_4=20,$$
$$0,5x_2+0,5x_4=1,$$
$$5x_3+x_4=10,$$
$$-0,6x_4=0.$$

Из последнего уравнения легко находим $x_4=0$; из 3-го уравнения находим $x_3=2$; из 2-го – $x_2=2$ и из 1-го – $x_1=1$ соответственно.

Задание к работе:

Методом Гаусса решите системы уравнений:

$$1)\begin{cases}7x_1+9x_2+4x_3+2x_4=2, & x_1=-0{,}4\\ 2x_1-2x_2+x_3+x_4=6, & x_2=-1{,}2\\ 5x_1+6x_2+3x_3+2x_4=3, & x_3=3{,}4\\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=0. & x_4=1.\end{cases}\qquad 2)\begin{cases}2x_1-3x_2+3x_3+2x_4=3, & x_1=\frac{1}{2},\\ 6x_1+9x_2-2x_3-x_4=-4, & x_2=-\frac{2}{3},\\ 10x_1+3x_2-3x_3-2x_4=3, & x_3=2,\\ 8x_1+6x_2+x_3+3x_4=-7. & x_4=-3.\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}6x_1+5x_2-2x_3+4x_4=-4, & x_1=\frac{2}{3},\\ 9x_1-x_2+4x_3-x_4=13, & x_2=-1,\\ 3x_1+4x_2+2x_3-2x_4=1, & x_3=\frac{3}{2},\\ 3x_1-9x_2+2x_4=11. & x_4=0.\end{cases}\qquad 4)\begin{cases}4x_1-3x_2+x_3+5x_4=7, & x_1=2,\\ x_1-2x_2-2x_3-3x_4=3, & x_2=1,\\ 3x_1-x_2+2x_3=-1, & x_3=-3,\\ 2x_1+3x_2+2x_3-8x_4=-7. & x_4=1.\end{cases}$$

$$5)\begin{cases}2x_1-x_2-6x_3+3x_4=-1, & x_1=-3,\\ 7x_1-4x_2+2x_3-15x_4=-32, & x_2=0,\\ x_1-2x_2-4x_3+9x_4=5, & x_3=-\frac{1}{2},\\ x_1-x_2+2x_3-6x_4=-8. & x_4=\frac{2}{3}.\end{cases}\qquad 6)\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-2x_4=1, & x_1=\frac{2}{3},\\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=2, & x_2=-\frac{43}{18},\\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=-5, & x_3=\frac{13}{9},\\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=11. & x_4=-\frac{7}{18}.\end{cases}$$

Порядок выполнения работы:

1. Изучить инструкцию к практической работе.
2. Выполнить задание.
3. Оформить отчет.

Содержание отчета:

1. Тема.
2. Цель.
3. Материальное обеспечение.
4. Практическое задание.

Вопросы для самоконтроля:

1. Применять метод Гаусса можно к любой системе линейных уравнений?

2. Можно получить множество решений, при решении систем линейных уравнений методом Гаусса?

Практическое занятие № 2

Тема: «Матрицы и определители. Элементарные преобразования матрицы. Решение систем линейных уравнений матричным способом (метод обратной матрицы) Применение различных методов решения систем линейных уравнений в задачах в области профессиональной деятельности»

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с помощью обратной матрицы (иногда этот способ именуют ещё матричным методом или методом обратной матрицы) требует предварительного ознакомления с таким понятием как матричная форма записи СЛАУ. Метод обратной матрицы предназначен для решения тех систем линейных алгебраических уравнений, у которых определитель матрицы системы отличен от нуля. Естественно, при этом подразумевается, что матрица системы квадратна (понятие определителя существует только для квадратных матриц). Суть метода обратной матрицы можно выразить в трёх пунктах:

1. Записать три матрицы: матрицу системы A, матрицу неизвестных X, матрицу свободных членов B.
2. Найти обратную матрицу A^{-1}.
3. Используя равенство $X=A^{-1}\cdot B$ получить решение заданной СЛАУ.

Почему $X=A^{-1}\cdot B$? показать\скрыть

Перед переходом к чтению примеров рекомендую ознакомиться с методами вычисления обратных матриц, изложенными здесь.

Пример №1

Решить СЛАУ $\left\{\begin{aligned} & -5x_1+7x_2=29; \\ & 9x_1+8x_2=-11. \end{aligned}\right.$ с помощью обратной матрицы.

Решение

Запишем матрицу системы A, матрицу свободных членов B и матрицу неизвестных X.

$$A=\left(\begin{array}{cc} -5 & 7 \\ 9 & 8 \end{array}\right);\; B=\left(\begin{array}{c} 29 \\ -11 \end{array}\right);\; X=\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right).$$

Найдём обратную матрицу к матрице системы, т.е. вычислим A^{-1}. В примере № 2 на странице, посвящённой нахождению обратных матриц, обратная матрица была уже найдена. Воспользуемся готовым результатом и запишем A^{-1}:

$$A^{-1}=-\frac{1}{103}\cdot\left(\begin{array}{cc} 8 & -7 \\ -9 & -5 \end{array}\right).$$

Теперь подставим все три матрицы (X, A^{-1}, B) в равенство $X=A^{-1}\cdot B$. Затем выполним умножение матриц в правой части данного равенства.

$$\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right)=-\frac{1}{103}\cdot\left(\begin{array}{cc} 8 & -7 \\ -9 & -5 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c} 29 \\ -11 \end{array}\right)=$$
$$=-\frac{1}{103}\cdot\left(\begin{array}{c} 8\cdot 29+(-7)\cdot(-11) \\ -9\cdot 29+(-5)\cdot(-11) \end{array}\right)=-\frac{1}{103}\cdot\left(\begin{array}{c} 309 \\ -206 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} -3 \\ 2 \end{array}\right).$$

Итак, мы получили равенство $\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} -3 \\ 2 \end{array}\right)$. Из этого равенства имеем: $x_1=-3$, $x_2=2$.

Ответ: $x_1=-3$, $x_2=2$.

Пример №2

Решить СЛАУ $\left\{\begin{aligned} & x_1+7x_2+3x_3=-1; \\ & -4x_1+9x_2+4x_3=0; \end{aligned}\right.$ методом обратной матрицы.

Решение

Запишем матрицу системы A, матрицу свободных членов B и матрицу неизвестных X.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 3\\ -4 & 9 & 4\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix};\; B=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 6\end{pmatrix};\; X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Теперь настал черёд найти обратную матрицу к матрице системы, т.е. найти A^{-1}. В примере № 3 на странице, посвящённой нахождению обратных матриц, обратная матрица была уже найдена. Воспользуемся готовым результатом и запишем A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{26}\cdot\begin{pmatrix}6 & -5 & 1\\ 8 & 2 & -16\\ -12 & -3 & 37\end{pmatrix}.$$

Теперь подставим все три матрицы (X, A^{-1}, B) в равенство $X=A^{-1}\cdot B$, после чего выполним умножение матриц в правой части данного равенства.

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{26}\cdot\begin{pmatrix}6 & -5 & 1\\ 8 & 2 & -16\\ -12 & -3 & 37\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 6\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{26}\cdot\begin{pmatrix}6\cdot(-1)+(-5)\cdot 0+1\cdot 6\\ 8\cdot(-1)+2\cdot 0+(-16)\cdot 6\\ -12\cdot(-1)+(-3)\cdot 0+37\cdot 6\end{pmatrix}=\frac{1}{26}\cdot\begin{pmatrix}0\\ -104\\ 234\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -4\\ 9\end{pmatrix}$$

Итак, мы получили равенство $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -4\\ 9\end{pmatrix}$. Из этого равенства имеем: $x_1=0$, $x_2=-4$, $x_3=9$.

Ответ: $x_1=0$, $x_2=-4$, $x_3=9$.

Естественно, что решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы без применения специальных программ вроде Mathcad возможно лишь при сравнительно небольшом количестве переменных.

Если СЛАУ содержит четыре и более переменных, то гораздо удобнее в таком случае применить метод Гаусса или метод Гаусса-Жордана.

Тема 1.3 Действия над комплексными числами
Практическое занятие № 3,4

Тема занятия: Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах. Переход от алгебраической формы к тригонометрической и показательной и обратно.

Цель: расширение и закрепление теоретических знаний

1. Вычислите:

а) $\dfrac{1+3i}{-2+i}\cdot(-2i)+1$;

б) $\left(\dfrac{i^{16}+3}{i^{6}+3}\right)^{5}$.

2. Найдите модуль и аргумент комплексного числа z:

$z=(-5+i)(-5-i)$

3. Выполните умножение, используя тригонометрическую форму комплексного числа:

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{i\sqrt{6}}{6}\right).$$

4. Возведите в степень по формуле Муавра и запишите результат в алгебраической форме: $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^9$.

5. Извлеките корень: $\sqrt{2+2i\sqrt{3}}$.

6. Изобразите на комплексной области множество всех точек z,удовлетворяющих условию:

$|z-1+i| \geq 1$, Re z >1, Im z ≤ -1.

7. Выполните действия в показательной форме:

$$8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right):\left(4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

Раздел 2. Основы дискретной математики
Тема 2.2 Основы теории графов
Практическое занятие № 5

Тема: Решение вариативных задач и упражнений.

Задача 1. На рисунке справа схема дорог Н-ского района изображена в виде графа; в таблице слева содержатся сведения о протяжённости каждой из этих дорог (в километрах).

	П1	П2	П3	П4	П5	П6
П1		10			8	5
П2	10			20	12	
П3				4		
П4		20	4		15	
П5	8	12		15		7
П6	5				7	

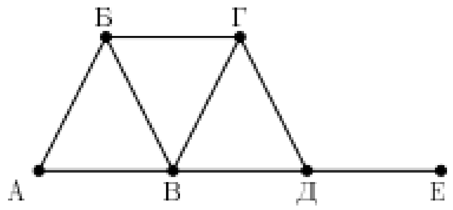


Рис. 4: Граф дорог Н-ского района

Так как таблицу и схему рисовали независимо друг от друга, то нумерация населённых пунктов в таблице никак не связана с буквенными обозначениями на графе. Определите, какова протяжённость дороги из пункта Б в пункт В. В ответе запишите целое число — так, как оно указано в таблице.

Решение. Из рисунка видно, что у вершины Е есть ровно один сосед — вершина Д, причём никакая другая вершина не обладает таким свойством. Найдём в таблице вершину с единственным соседом. Это вершина П3, а её сосед — П4. Следовательно, П3 = Е, П4 = Д. Точно так же мы замечаем, что только В и П5 имеют по четыре соседа. Следовательно, П5 = В. У вершины Д есть ещё один сосед, помимо В и Е — это вершина Г. Третьим соседом вершины П4 является П2, значит, П2 = Г. Наконец, мы заметим, что только А и П6 имеют по два соседа, поэтому П6 = А. Остаётся только одна нерассмотренная вершина, следовательно, П1 = Б.

Итак, мы доказали, что П1 = Б, П5 = В. Следовательно, длина дороги из Б в В равна 8.

Ответ: 8.

Задача 2. Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F, G построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.

	A	B	C	D	E	F	G
A		5		12			25
B	5			8			
C				2	4	5	10
D	12	8	2				
E			4				5
F			5				5
G	25		10		5	5	

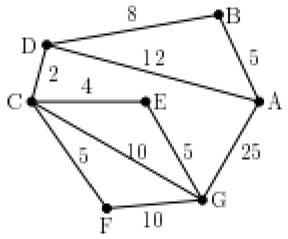


Рис. 5: Дороги между населёнными пунктами

Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и G (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

Решение. Для наглядности изобразим граф в виде рисунка (см. рис. 5). Сразу видно, что есть путь из A в G из одного ребра длины 25. Поищем более короткие пути. Поскольку длины всех рёбер положительны, то кратчайший путь не может содержать циклов. Кратчайший путь из A в B имеет длину 5 (это одно ребро), так как любое другое выходящее из A ребро имеет большую длину. Кратчайший путь из A в D имеет длину 12 (тоже одно ребро), так как единственный альтернативный путь A → B → D имеет длину 13. Поэтому кратчайший путь из A в C имеет длину 14 (A → D → C). Из C в G ведут три пути (без циклов): путь C → E → G длины 9, путь C → G длины 10 и путь C → F → G длины 15. Кратчайший из них имеет длину 9. Поэтому длина кратчайшего «обходного» пути из A в G равна $14 + 9 = 23 < 25$. Значит, кратчайший путь из A в G имеет длину 23.

Ответ: 23.

Задача 3. На рисунке представлена схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К, Л, М. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город М, проходящих через город В?

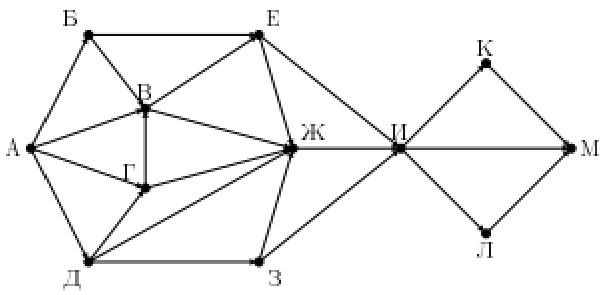


Рис. 6: Схема дорог

Решение. Из рисунка видно, что любой путь из А в М проходит через И. По условию задачи мы должны искать только те пути, которые проходят через В. Обозначим число путей через N.

По теореме 1 $N = p(\text{А},\text{В})p(\text{В},\text{И})p(\text{И},\text{М})$. Из рисунка видно, что имеется четыре пути из А в В (А → Б → В, А → В, А → Г → В, А → Д → Г → В), три пути из В в И (В → Е → И, В → Ж → И, В → Е → Ж → И) и три пути из И в М (И → К → М, И → М, И → Л → М). Получаем $N = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.
Ответ: 36.

Задача 4. Сколько существует различных путей из города А в город И для схемы дорог из предыдущей задачи?
Решение. Из рисунка видно, что не существует такой вершины v, через которую проходил бы любой путь из А в И, поэтому теорема 1 не поможет. Воспользуемся общим алгоритмом. Оформим решение в виде таблицы. В первом столбце будем писать номер итерации, во втором столбце — выбранную на этой итерации вершину, а в остальных двенадцати столбцах — число путей из А в вершину, которой помечен столбец. Чтобы не загромождать таблицу, не будем писать нули, оставив вместо них пустые клетки. (Таблица использована для краткой записи всех шагов алгоритма. При решении задач можно просто подписывать число путей рядом с каждой вершиной.)

№	v	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л	М
0	–	1											
1	Б	1	1										
2	Д	1	1			1							
3	Г	1	1		2	1							
4	З	1	1		2	1			1				
5	В	1	1	4	2	1			1				
6	Е	1	1	4	2	1	5		1				
7	Ж	1	1	4	2	1	5	12	1				
8	И	1	1	4	2	1	5	12	1	18			
9	К	1	1	4	2	1	5	12	1	18	18		
10	Л	1	1	4	2	1	5	12	1	18	18	18	
11	М	1	1	4	2	1	5	12	1	18	18	18	54

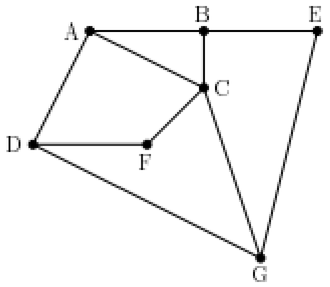
Рис. 7: Работа алгоритма для поиска числа путей

Прокомментируем несколько итераций. На итерации 1 есть две вершины, все непосредственные предшественники которых уже отмечены. Это вершины Б и Д с предшественником А. Мы выбираем вершину Б и вычисляем $p(\text{А},\text{Б}) = 1$ (можно было выбрать и Д). На итерации 4 уже помечены вершины А, Б, Д и Г. Поэтому мы можем выбрать любую из вершин В, З. Мы выбрали З и вычислили $p(\text{А},\text{З}) = 1$. На итерации 5 можно выбрать только одну вершину — В. Её непосредственные предшественники — А, Б и Г. Складывая значения, приписанные этим трём вершинам, получаем $p(\text{А},\text{В}) = 1 + 1 + 2 = 4$. Остальные итерации срабатывают аналогично.

Заметим, что мы могли и не вычислять число путей для *всех* вершин. Как только мы узнали, что $p(\text{А},\text{И}) = 18$ (это произошло в итерации 8), можно было остановиться и не рассматривать вершины К, Л, М. Итак, $p(\text{А},\text{И}) = 18$.
Ответ: 18.

Упражнения.

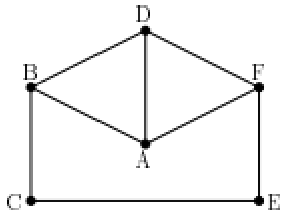
Упражнение 1. Неориентированный граф задан в виде рисунка и в виде таблицы. Установите соответствие между вершинами этих представлений графа.



	1	2	3	4	5	6	7
1					1	1	
2				1	1		1
3				1			1
4		1	1		1	1	
5	1	1		1			
6	1			1			1
7		1	1			1	

Рис. 8: Граф из упражнения 1

Упражнение 2. Нагруженный неориентированный граф задан в виде рисунка и в виде таблицы. Чему равна длина ребра, соединяющего вершины B и D?



	1	2	3	4	5	6
1			5	5	7	
2					12	7
3	5			9		5
4	5		9			5
5	7	12				
6		7	5	5		

Рис. 9: Граф из упражнения 2

Упражнение 3. Неориентированный граф задан таблицей. Найдите длину кратчайшего пути из вершины A в вершину D.

	A	B	C	D	E	F	G
A		10	12				
B	10		7				1
C	12	7		9	1		
D			9			4	
E			1			3	2
F				4	3		7
G		1			2	7	

Рис. 10: Граф из упражнения 3

Упражнение 4. Ориентированный граф задан таблицей. Найдите длины кратчайших путей из B в E и из E в B.

	A	B	C	D	E	F	G
A			1	5			3
B	2				10		
C		1			8	6	3
D							4
E	6						3
F					4		
G	2					2	

Рис. 11: Граф из упражнения 4

Упражнение 5. Ориентированный граф задан рисунком.
а) Сколько существует различных путей из A в N?
б) Сколько существует путей из A в N, проходящих через E, но не проходящих через L?
в) Сколько существует путей из A в N, проходящих и через F, и через K?
г) Какова длина самого длинного пути из A в N? Сколько существует таких путей?

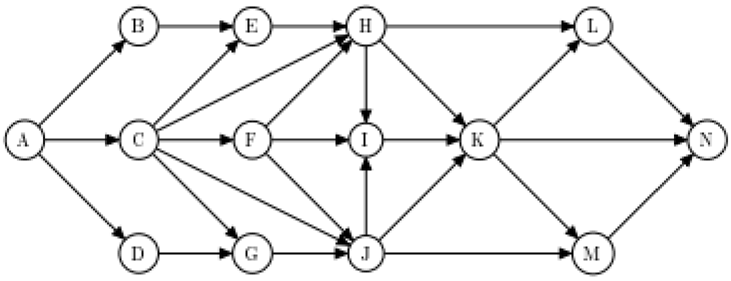


Рис. 12: Граф из упражнения 5

Указания к упражнениям.

Упражнение 1. Используйте метод из решения задачи 1. Может оказаться, что на некотором шаге не удаётся найти две соответствующие друг другу вершины. Тогда нужно попытаться использовать дополнительную информацию. Например, если оказалось, что вершины А, Б совпадают с вершинами П1, П2 (без учёта порядка), а вершины А, В — с вершинами П2, П3 (тоже без учёта порядка), то А = П2, так как только эти две вершины встречаются по два раза.

Упражнение 2. В задаче не требуется установить соответствие между вершинами. Нужно лишь найти длину ребра, соединяющего B и D. Само ребро не обязательно определяется однозначно.

Упражнение 3. Используйте тот же метод, что и в задаче 2: последовательно вычислять длины кратчайших путей из A до других вершин.

Упражнение 4. Используйте тот же метод, что и в задаче 2. Единственное отличие состоит в том, что теперь граф ориентированный, поэтому по рёбрам можно идти лишь в одну сторону. Следовательно, длины кратчайших путей из B в E и из E в B могут быть разными.

Упражнение 5. а) Используйте алгоритм.
б) Если пути не проходят через L, то L с входящими в неё и выходящими из неё рёбрами можно удалить из графа. После этого нужно решить задачу для оставшегося графа.
в) Используйте алгоритм и теорему об умножении.
г) Используйте ту же идею, что и в алгоритме для поиска числа всех путей. Нужно запоминать только те пути, длина которых максимальна.

Практическое занятие № 6
Тема занятия: Построение графов.
Цель: систематизировать и обобщить знания по теме

1. Показать, что два графа изоморфны:

2. Начертить орграф, соответствующий отношению: «а делится на b» на множестве целых чисел от 1 до 12.
3. Построить матрицы смежности и инцидентности графа G:
4. Дана матрица смежности. Постройте соответствующий ей орграф. Найдите матрицу инцидентности.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. В графе 11 вершин, степени которых равны 4. Сколько ребер имеет этот граф?
6. Является ли граф эйлеровым; двудольным? Если граф является эйлеровым, найти эйлеров цикл.

7. Перечислите все графы, имеющие гамильтонов цикл, 6 вершин, 8 ребер.

Раздел 3. Основы математического анализа
Тема 3.1 Дифференциальное и интегральное исчисление
Практическое занятие 7

Пределы. Непрерывность функций. Производная, геометрический смысл. Исследование

функций

1.Вычислить производную функций:

а) $y=\left(3+2x^2\right)^4$; б) $y = ln\ cos\ x^2$; в) $y=\arcsin\sqrt{1-3x}$;

г) $y = tg\dfrac{x}{1+x}$; д) $y=\sin\left(x^2+2\right)$ е) $y=4^{\cos x}\cdot arctg\ 2x$.

а) $y = ctg^2 x + 2\ln(\sin x)$; б) $y = arctg\sqrt{9x^2 - 1}$;

в) $y = 3^{\cos^2 x - 2\cos x}$; г) $y = \ln \sin \frac{x}{2}$.

Решение. а) Применим правила дифференцирования суммы и сложной функции:

$$y' = (ctg^2 x)' + 2(\ln(\sin x))' = 2ctgx \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) + 2\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = 2ctgx\left(1 - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = -2ctg^3 x.$$

б) $$\left(arctg\sqrt{9x^2 - 1}\right)' = \frac{1}{1 + (9x^2 - 1)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{9x^2 - 1}} \cdot 9 \cdot 2x = \frac{1}{x\sqrt{9x^2 - 1}}.$$

в) $$y' = 3^{\cos^2 x - 2\cos x} \cdot \ln 3 \cdot (\cos^2 x - 2\cos x)' =$$

$$= 3^{\cos^2 x - 2\cos x} \cdot \ln 3(-2\cos x \cdot \sin x + 2\sin x) = 3^{\cos^2 x - 2\cos x} \cdot \ln 3 \cdot 2\sin x(1 - \cos x).$$

г) $$y' = \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \frac{1}{2}\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}ctg\frac{x}{2}.$$

2. Вычислить производные функций:

Решение. а) Функцию $y = (3 + 2x^2)^4$ можно записать как сложную функцию в виде $y = u^4$, где $u = 3 + 2x^2$. По правилу дифференцирования сложной функции получаем $y' = y'_u \cdot u'_x = 4u^3 \cdot u_x' = 4(3 + 2x^2)^3 \cdot (3 + 2x^2)' = 16(3 + 2x^2)^3 \cdot x$.

б) $$y' = \frac{1}{\cos x^2} \cdot (\cos x^2)' = \frac{1}{\cos x^2} \cdot (-\sin x^2) \cdot (x^2)' = -\frac{\sin x^2}{\cos x^2} \cdot 2x = -tg\, x^2 \cdot 2x.$$

в) Данную функцию можно представить в виде $y = \arcsin u$, где $u = \sqrt{1 - 3x}$. Тогда $$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u_x' = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - 3x)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - 3x}} \cdot (-3) = \frac{-3}{2\sqrt{3x(1 - 3x)}}.$$

г) $$y' = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x+1}} \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x+1}} \cdot \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2 \cos^2 \frac{x}{x+1}}.$$

д) $$y' = \cos(x^2 + 2) \cdot (x^2 + 2)' = 2x\cos(x^2 + 2)$$

е) $$y' = (4^{\cos x})' \cdot arctg\, 2x + 4^{\cos x} \cdot (arctg\, 2x)' =$$

$$= 4^{\cos x} \ln 4 \cdot (\cos x)' \cdot arctg\, 2x + 4^{\cos x} \cdot \frac{1}{1 + (2x)^2} \cdot (2x)' =$$

$$= -4^{\cos x} \cdot \ln 4 \cdot \sin x \cdot arctg\, 2x + 4^{\cos x} \cdot \frac{2}{1 + 4x^2}.$$

Практическое занятие 8

Вычисление простейших определенных интегралов.

Определение максимума мощности в цепи постоянного тока с применением производной. Вычисления площадей и объемов при проектировании объектов транспорта с применением определенного интеграла

Тема занятия: Нахождение производной сложной функции. Интегрирование функций. Метод замены переменной. Интегрирование по частям. Вычисление определённого интеграла. Приложение определенного интеграла к решению различных прикладных задач.

Цель: закрепление умений нахождения производной сложной функции; закрепление умений интегрирования функций методом замены переменной и методом интегрирования по частям; закрепление умений вычисления определённого интеграла.

1. Найти производную функции:

$1)\, y = 4x + 6\sqrt[3]{x}; \qquad 2)\, y = (x^2 - 1)(x^2 - 3);$

$3)\, y = \dfrac{\sin x}{1 + tgx}; \qquad 4)\, y = \cos^4 x - \sin^4 x;$

2. Найти интегралы, используя основные свойства интеграла:

$1)\int \dfrac{dx}{\sqrt{2-5x}} \qquad 2)\int_1^4 (\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}})dx$

3. Найти интегралы, используя метод замены переменной:

$1)\int e^{x+x^2}(1+2x)dx \qquad 2)\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{32xdx}{(x^2+1)^5}$

4. Найти интеграл, используя метод интегрирования по частям:

$1)\int \ln xdx \qquad 2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos xdx$

5. Найти интеграл: $\int \sin^3 xdx$

Тема 3.2 Обыкновенные дифференциальные уравнения

Практическое занятие № 9

Тема занятия: Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными.

Цель: закрепление умений решения дифференциальных уравнений

Проинтегрировать следующие уравнения

$1. (1+y^2)dx + xydy = 0 \qquad 2. xy(1+x^2)y' = 1+y^2$

$3. (1+y^2)dx = xdy \qquad 4. (x+1)dy + xydx = 0$

$5. \sqrt{y^2+1}dx = xydy \qquad 6. 2x^2yy' + y^2 = 2$

$7. y' - xy^2 = 2xy \qquad 8. y' - y = 2x - 3$

$9. y' = \dfrac{y}{x^2} \qquad 10. (1+y^3)xdx - (1+x^2)y^2dy$

Найти частные решения удовлетворяющие заданным начальным условиям.

. $(x^2-1)y'+2xy^2=0$, y = 1 при x = 0

2. $y'ctgx+y=2$, y = - 1 при x = 0

3. $y'=3\sqrt[3]{x^2}$, y = 2 при x = 0

4. $xy'+y=y^2$, y = 0,5 при x = 1

5. $(x+2y)y'=1$, y = - 1 при x = 0

6. $\frac{xdx}{1+y}-\frac{ydy}{1+x}=0$, y = 1 при x = 1

7. $xy'=y\ln y$, y = 1 при x = 0

8. $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$, y = 1 при x = 0

9. $2\sqrt{y}dx=dy$, y = 1 при x = 0

1. Решить уравнение: $(1+\cos x)yy'=(1+y^2)\sin x$.
2. Решить уравнение: $y'-y=x\cdot\cos x$.
3. Решить задачу Коши: $y''-9y=0, y(0)=5, y'(0)=2$.

Тема 3.4 Ряды
Практическое занятие №10
Решение упражнений на определение сходимости ряда.

Пример 1.1. Найти сумму ряда

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{2n-1\quad 2n+1}+\ldots .$$

Решение. Общий член ряда можно представить в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{2n-1\quad 2n+1}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1}.$$

Определим коэффициенты A и B:

$1=A\quad 2n+1\quad +B\quad 2n-1\quad ;$

при $n=\frac{1}{2}$: $1=2A\Rightarrow A=\frac{1}{2}$;

при $n=-\frac{1}{2}$: $1=-2B\Rightarrow B=-\frac{1}{2}$.

Таким образом, n –ый член ряда будет иметь следующий вид:

$$u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right),$$

откуда

$$u_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right),u_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right),u_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right),u_4=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right),\ldots .$$

Следовательно,

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$, то ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{2}$.

Ответ: $S=\frac{1}{2}$.

Пример 1.2. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots.$$

Решение. Данный ряд составлен из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и поэтому сходится. Найдем его сумму. Здесь $a=\frac{2}{3}$ (первый член прогрессии), $q=\frac{1}{2}$ (знаменатель прогрессии). Следовательно,

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{2/3}{1-1/2}=\frac{4}{3}.$$

Так как ряд имеет конечную сумму, то он сходится.

Ответ: ряд сходится, $S=\frac{4}{3}$.

Пример 1.3. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{3}{13}+\frac{6}{18}+\frac{9}{23}+\ldots+\frac{3n}{5n+8}+\ldots.$$

Решение. Так как

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{5n+8}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{5+8/n}=\frac{3}{5},$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится (не выполняется необходимый признак сходимости).

Ответ: расходится.

Пример 1.4. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{1}{n^2}$.

Решение. Воспользуемся необходимым признаком сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} n^2 \sin\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1.$$

Так как $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится (не выполняется необходимый признак сходимости).

Ответ: расходится.

Пример 1.5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$.

Решение. Члены данного ряда меньше соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ т.е. ряда $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$. Но последний ряд сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Следовательно, сходится и данный ряд (по первому признаку сравнения).

Ответ: сходится.

Пример 1.6. Исследовать сходимость ряда с общим членом $u_n = \frac{1}{4\cdot 2^n - 3}$.

Решение. Сравним этот ряд с рядом, у которого общий член $v_n = 1/2^n$ (т.е. с бесконечно убывающей геометрической прогрессией). Применим второй признак сравнения рядов:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{4\cdot 2^n - 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4-3/2^n} = \frac{1}{4}.$$

Так как предел конечен и отличен от нуля и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится, то сходится и данный ряд.

Ответ: сходится.

Практическое занятие №11

Тема занятия: Разложение функций в ряд Фурье

Цель: расширение и закрепление теоретических знаний

1. Исследовать знакоположительный ряд на сходимость:

$$1)\sum \frac{1}{(2n+1)!}; \qquad 2)\sum \frac{arctgn^2}{n(n+1)(n+2)};$$

2. Исследовать на сходимость (абсолютную и условную) знакочередующийся ряд:

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{n}{2n-1}.$$

3. Найти область сходимости ряда:

$$\sum n!x^n.$$

4. разложить в ряд Маклорена функцию:

$$f(x) = \cos\frac{x}{3}.$$

5. Разложить в ряд Тейлора функцию по степени

$$f(x) = \ln x, x_0 = 1.$$

6. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию в промежутке $-\pi < x < \pi$:

$$f(x) = 2x+3.$$

7. Вычислить интеграл:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$$ с точностью до 0.0001.

Раздел 4. Элементы теории вероятностей и математической статистики
Тема 4.1.Вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей
Практическое занятие №12

Решение простейших задач на определение вероятности с использованием теоремы сложения вероятностей.

В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.

Решение: важнейшей предпосылкой для использования классического определения вероятности является **возможность подсчёта общего количества исходов**.

Всего в урне: 15 + 5 + 10 = 30 шаров, и, очевидно, справедливы следующие факты:

– извлечение любого шара одинаково возможно (***равновозможность*** *исходов)*, при этом исходы ***элементарны*** и образуют ***полную группу событий*** *(т.е. в результате испытания обязательно будет извлечён какой-то один из 30 шаров)*.

Таким образом, общее число исходов: $n = 30$

Рассмотрим событие: A – из урны будет извлечён белый шар. Данному событию благоприятствуют $m = 15$ элементарных исходов, поэтому по классическому определению:

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён белый шар.

Как ни странно, даже в такой простой задаче можно допустить серьёзную неточность, на которой я уже заострял внимание в первой статье по **теории вероятностей**. Где здесь подводный камень? Здесь некорректно рассуждать, что *«раз половина шаров белые, то вероятность извлечения белого шара* $P(A) = \frac{1}{2}$*»*. В классическом определении вероятности речь идёт об **ЭЛЕМЕНТАРНЫХ** исходах, и дробь $\frac{15}{30}$ следует обязательно прописать!

С другими пунктами аналогично, рассмотрим следующие события:

B – из урны будет извлечён красный шар;
C – из урны будет извлечён чёрный шар.

Событию B благоприятствует 5 элементарных исходов, а событию C – 10 элементарных исходов. Таким образом, соответствующие вероятности:

$P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$;

$P(C) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

Типичная проверка многих задач по терверу осуществляется с помощью **теоремы о сумме вероятностей событий, образующих полную группу**. В нашем случае события A, B, C образуют полную группу, а значит, сумма соответствующих вероятностей должна обязательно равняться единице: $P(A)+P(B)+P(C)=1$.

Проверим, так ли это: $P(A)+P(B)+P(C)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{6}{6}=1$, в чём и хотелось убедиться.

Ответ: а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{1}{6}$, в) $\frac{1}{3}$

В принципе, ответ можно записать и подробнее, но лично я привык ставить туда только числа – по той причине, что когда начинаешь «штамповать» задачи сотнями и тысячами, то стремишься максимально сократить запись решения. К слову, о краткости: на практике распространён «скоростной» вариант оформления **решения**:

Всего: 15 + 5 + 10 = 30 шаров в урне. По классическому определению: $p_Б=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён белый шар; $p_К=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён красный шар; $p_Ч=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён чёрный шар.

Ответ: а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{1}{6}$, в) $\frac{1}{3}$

Однако если в условии несколько пунктов, то решение зачастую удобнее оформить первым способом, который отнимает чуть больше времени, но зато всё «раскладывает по полочкам» и позволяет легче сориентироваться в задаче.

Практическое занятие №13

Решение простейших задач на определение вероятности с использованием теорем сложения и умножения вероятностей.

Задача 2

В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

Выберите целесообразный вариант оформления и сверьтесь с образцом внизу страницы.

В простейших примерах количество общих и количество благоприятствующих исходов лежат на поверхности, но в большинстве случаев картошку приходится выкапывать самостоятельно. Каноничная серия задач о забывчивом абоненте:

Задача 3

Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что одна из них – ноль, а другая – нечётная. Найти вероятность того, что он наберёт правильный номер.

***Примечание**: ноль – это чётное число (делится на 2 без остатка)*

Решение: сначала найдём общее количество исходов. По условию, абонент помнит, что одна из цифр – ноль, а другая цифра – нечётная. Здесь рациональнее не мудрить с **комбинаторикой** и воспользоваться ***методом прямого перечисления исходов***. То есть, при оформлении решения просто записываем все возможные комбинации:
01, 03, 05, 07, 09
10, 30, 50, 70, 90

и подсчитываем их – всего: 10 исходов.

Благоприятствующий исход один: верный номер.

По классическому определению:

$p = \frac{1}{10} = 0{,}1$ – вероятность того, что абонент наберёт правильный номер

Ответ: 0,1

Тема 4.2 Случайная величина, ее функция распределения
Практическое занятие № 14
Тема занятия: По заданному условию построить ряд распределения случайной величины
Цель: формирование исследовательского подхода к решению задач
1. В урне 7 шаров, из которых 4 голубых, а остальные красные. Из этой урны извлекаются три шара. Найдите закон распределения дискретной случайной величины X, равной числу голубых шаров в выборке.
2. Найти функцию распределения F(x) и построить ее график.
Найти среднее квадратичное отклонение случайной величины X, заданной законом ее распределения:

X_i	1	2	3	4	5	6	7	8
P_i	0.3	0.2	0.1	0.1	0.2	0.01	0.08	0.01

Тема 4.3. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины
Практическое занятие № 15
Тема занятия: нахождение математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины заданной законом распределения
Цель работы: находить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины по заданному закону ее распределения;
Дано: п – порядковый номер варианта студента.
xiп – 10 п – 6 п – 2 пп + 1 п + 3 п + 5 п + 8
pi0,17 0,03 0,16 0,07 ? 0,4 0,04 0,01
Найти:
Вероятность того, что случайная величина X примет значение п + 1;
Составить закон распределения случайной величины X;
Математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины;
Найти числовые характеристики случайной величины “x”. Варианты:
Xi -3 4 5 7
pi 10a2-3a 15a2-5a 8a2-3a 17a2-4a-1
Xi -2 3 5 9
pi 5a2-3,5 3a2-2a-1,5 15a2-9a-2 4,5a-3,5
Xi 2 3 8 11
pi 41a2-20 23a2-16a 30a2-12a-6 6a2-32a+20
Xi 5 7 11 18

pi 10a2-4a-1 6a2-2 5a2-a-1 4a2-1
Xi 2 3 5 8
pi 15a2-3,5 6a-3a2-2,1 8a2-1,5 2a-0,9
6.
Xi 7 10 11 13
pi 70a2-6 5a2 20a2+12a-5,3 5a2-28a-8,7
Контрольные вопросы:
Назовите числовые характеристики дискретной случайной величины.
Запишите формулу нахождения математического ожидания.
Запишите формулу нахождения дисперсии и среднего квадратичного отклонения.

Раздел 5. Основные численные методы
Тема 5.1 Численное интегрирование
Практическое занятие № 16
Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона. Оценка погрешности

Пример 1. Вычислить по формуле прямоугольников $\int_2^5 x^2 dx$. Найти абсолютную и относительную погрешности вычислений.

Решение:

Разобьём отрезок [*a*, *b*] на несколько (например, на 6) равных частей. Тогда *a* = 0, *b* = 3

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{5-2}{6} = \frac{1}{2}$,

$x_k = a + k \cdot \Delta x$

$x_0 = 2 + 0 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$x_1 = 2 + 1 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5$

$x_2 = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} =3$

$x_3 = 2 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$

$x_4 = 2 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 4$

$x_5 = 2 + 5 \cdot \frac{1}{2} = 4{,}5$

$(x_0) = 2^2 = 4$
$f(x_1) = 2{,}5^2 = 6{,}25$
$f(x_2) = 3^2 = 9$
$f(x_3) = 3{,}5^2 = 12{,}25$
$f(x_4) = 4^2 = 16$
$f(x_5) = 4{,}5^2 = 20{,}25$.

x	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y	4	6,25	9	12,25	16	20,25

По формуле (1):

$$\int_0^3 x^2 dx \approx \frac{1}{2}\cdot(4+6{,}25+9+12{,}25+16+20{,}25)=\frac{1}{2}\cdot 67{,}75=33{,}875$$

Для того, чтобы вычислить относительную погрешность вычислений, надо найти точное значение интеграла:

$$\int_2^5 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_2^5 = \frac{5^3}{3}-\frac{2^3}{3}=\frac{125}{3}-\frac{8}{3}=39$$

$$\Delta = |39-33{,}875| = 5{,}125$$

$$\delta = \frac{5{,}125}{39}\cdot 100\% \approx 13{,}14\%$$

Вычисления проходили долго и мы получили довольно-таки грубое округление. Чтобы вычислить этот интеграл с меньшим приближением, можно воспользоваться техническими возможностями компьютера.

Для нахождения определённого интеграла методом прямоугольников необходимо ввести значения подынтегральной функции *f(x)* в рабочую таблицу Excel в диапазоне *x* ∈ [2 ;5] с заданным шагом Δx = 0,1.

4. Открываем чистый рабочий лист.
5. Составляем таблицу данных *(x* и *f(x)).* Пусть первый столбец будет значениями *x*, а второй соответствующими показателями *f(x).* Для этого в ячейку А1 вводим слово *Аргумент*, а в ячейку В1 – слово *Функция*. В ячейку А2 вводится первое значение аргумента – левая граница диапазона (*2*). В ячейку А3 вводится второе значение аргумента – левая граница диапазона плюс шаг построения (*2,1*). Затем, выделив блок ячеек А2:А3, автозаполнением получаем все значения аргумента (за правый нижний угол блока протягиваем до ячейки А32, до значения *x=5*).
6. Далее вводим значения подынтегральной функции. В ячейку В2 необходимо записать её уравнение. Для этого табличный курсор необходимо установить в ячейку В2 и с клавиатуры ввести формулу *=A2^2* (при английской раскладке клавиатуры). Нажимаем клавишу *Enter*. В ячейке В2 появляется *4*. Теперь необходимо скопировать функцию из ячейки В2. Автозаполнением копируем эту формулу в диапазон В2:В32.
   В результате должна быть получена таблица данных для нахождения интеграла.
7. Теперь в ячейке В33 может быть найдено приближённое значение интеграла. Для этого в ячейку В33 вводим формулу *= 0,1*,* затем вызываем Мастер функций (нажатием на панели инструментов кнопки Вставка функции *(f(x))*. В появившемся диалоговом окне Мастер функции-шаг 1 из 2 слева в поле Категория выбираем Математические. Справа в поле Функция - функцию Сумм. Нажимаем кнопку *ОК.* Появляется диалоговое окно Сумм. В рабочее поле мышью вводим диапазон суммирования В2:В31. Нажимаем кнопку *ОК.* В ячейке В33 появляется приближённое значение искомого интеграла с недостатком (*37,955*) .

Сравнивая полученное приближённое значение с истинным значением интеграла (*39*), можно видеть, что ошибка приближения метода прямоугольников в данном случае равна

Δ= |39 - 37 , 955| = 1 ,045

$$\delta = \frac{1{,}045}{39}\cdot 100\% = 0{,}02679\cdot 100\% \approx 2{,}68\%.$$

Пример 2. Используя метод прямоугольников, вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ с заданным шагом Δx = 0,05.

Решение:

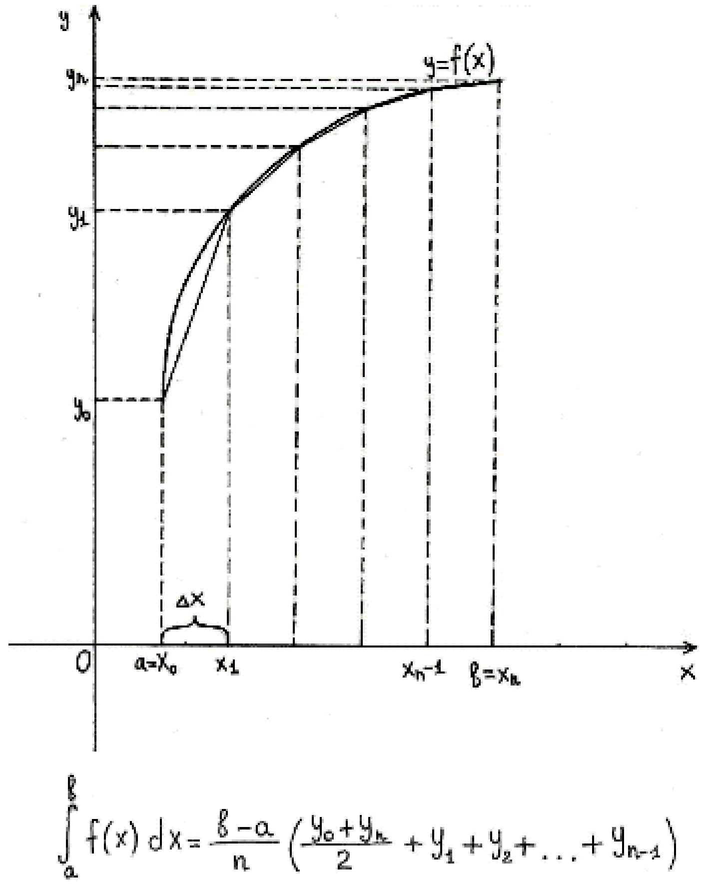
5. Для нахождения определённого интеграла значения подынтегральной функции *f(x)* должны быть введены в рабочую таблицу *Excel* в диапазоне $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ с заданным шагом Δx = 0,05. В созданную уже таблицу данных в ячейку A2 вводится левая граница интегрирования (*0*). В ячейку A3 вводится второе значение аргумента – левая граница диапазона плюс шаг построения (*0,05*). Затем, выделив блок ячеек A2:A3, автозаполнением получаем все значения аргумента (за правый нижний угол блока протягиваем до ячейки A33, до значения *x=1,55*).
6. Далее вводим значения подынтегральной функции. В ячейку B2 необходимо записать её уравнение. Для этого табличный курсор необходимо установить в ячейку B2. Здесь должно оказаться значение косинуса, соответствующее значению аргумента в ячейке A2. Для получения значения косинуса воспользуемся специальной функцией: нажимаем на панели инструментов кнопку Вставка функции (f_x) . В появившемся диалоговом окне Мастер функции-шаг 1 из 2 слева в поле Категория выбираем Математические. Справа в поле Функция - функцию *COS*. Нажимаем кнопку *ОК.* Появляется диалоговое окно *COS*. Наведя указатель мыши на серое поле окна, при нажатой левой кнопке сдвигаем поле вправо, чтобы открыть столбец данных (*А*). Указываем значение аргумента косинуса щелчком мыши на ячейке A2. Нажимаем кнопку *ОК.* В ячейке B2 появляется *1*. Теперь необходимо скопировать функцию из ячейки B2. Автозаполнением копируем эту формулу в диапазон B2:B33. В результате должна быть получена таблица данных для нахождения интеграла.
7. Теперь в ячейке B34 может быть найдено приближённое значение интеграла. Для этого в ячейку B34 вводим формулу *= 0,05*,* затем вызываем Мастер функций (нажатием на панели инструментов кнопки Вставка функции ((f_x)) . В появившемся диалоговом окне Мастер функции-шаг 1 из 2 слева в поле Категория выбираем Математические. Справа в поле Функция - функцию Сумм. Нажимаем кнопку *ОК.* Появляется диалоговое окно Сумм. В рабочее поле мышью вводим диапазон суммирования B2:B32. Нажимаем кнопку *ОК.* В ячейке B34 появляется приближённое значение искомого интеграла с избытком (*1,024056*).

Сравнивая полученное приближённое значение с истинным значением интеграла $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1\right)$, можно видеть, что ошибка приближения метода прямоугольников в данном случае равна

$$\Delta = |1{,}024056 - 1| = 0{,}024056$$

$$\delta = \frac{0{,}024056}{1} \cdot 100\% \approx 2{,}41\%$$

Метод трапеций обычно даёт более точное значение интеграла, чем метод прямоугольников. Криволинейная трапеция заменяется на сумму нескольких трапеций и приближённое значение определённого интеграла находится как сумма площадей трапеций



[Рисунок3]

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+\ldots+y_{n-1}\right)$$

Пример 3. Методом трапеций найти $\int_0^{\pi} \sin x dx$ с шагом Δx = 0,1.

Решение.

2. Открываем чистый рабочий лист.
3. Составляем таблицу данных *(x* и *f(x)).* Пусть первый столбец будет значениями *x*, а второй соответствующими показателями *f(x).* Для этого в ячейку А1 вводим слово *Аргумент*, а в ячейку В1 – слово *Функция*. В ячейку А2 вводится первое значение аргумента – левая граница диапазона (*0*). В ячейку А3 вводится второе значение аргумента – левая граница диапазона плюс шаг построения (*0,1*). Затем, выделив блок ячеек А2:А3, автозаполнением получаем все значения аргумента (за правый нижний угол блока протягиваем до ячейки А33, до значения *х=3,1*).
4. Далее вводим значения подынтегральной функции. В ячейку В2 необходимо записать её уравнение (в примере синуса). Для этого табличный курсор необходимо установить в ячейку В2. Здесь должно оказаться значение синуса, соответствующее значению аргумента в ячейке А2. Для получения значения синуса воспользуемся специальной функцией: нажимаем на панели инструментов кнопку Вставка функции *f(x)*. В появившемся диалоговом окне Мастер функции-шаг 1 из 2 слева в поле Категория выбираем Математические. Справа в поле Функция - функцию *SIN*. Нажимаем кнопку *ОК.* Появляется диалоговое окно *SIN*. Наведя указатель мыши на серое поле окна, при нажатой левой кнопке сдвигаем поле вправо, чтобы открыть столбец данных (*А*). Указываем значение аргумента синуса щелчком мыши на ячейке А2. Нажимаем кнопку *ОК.* В ячейке В2 появляется 0. Теперь необходимо скопировать функцию из ячейки В2. Автозаполнением копируем эту формулу в диапазон В2:В33. В результате должна быть получена таблица данных для нахождения интеграла.

5. Теперь в ячейке В34 может быть найдено приближённое значение интеграла по методу трапеций. Для этого в ячейку В34 вводим формулу = *0,1*((В2+В33)/2+,* затем вызываем Мастер функций (нажатием на панели инструментов кнопки Вставка функции *(f(x))*. В появившемся диалоговом окне Мастер функции-шаг 1 из 2 слева в поле Категория выбираем Математические. Справа в поле Функция - функцию Сумм. Нажимаем кнопку *ОК.* Появляется диалоговое окно Сумм. В рабочее поле мышью вводим диапазон суммирования В3:В32. Нажимаем кнопку *ОК* и ещё раз *ОК.* В ячейке В34 появляется приближённое значение искомого интеграла с недостатком (*1,997*) .

Сравнивая полученное приближённое значение с истинным значением интеграла $\left(\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (\cos 0) = -(-1) + 1 = 2\right)$, можно видеть, что ошибка приближения метода прямоугольников в данном случае вполне приемлемая для практики.

$$\Delta = |1{,}997 - 2| = |-0{,}003| = 0{,}003$$

$$\delta = \frac{0{,}003}{2} \cdot 100\% = 0{,}0015 \cdot 100\% = 0{,}15\%$$

X. **Решение упражнений.**

1. Вычислить $\int_0^2 e^x dx$ методом прямоугольников, разделив отрезок [0;1] на 20 равных частей.
   Ответ: $I \approx 6{,}02344, \ \Delta = 0{,}26656, \quad \delta = 4{,}24\%$.
2. Вычислить методом трапеций $\int_1^{1{,}5} \frac{dx}{x}$ при $\Delta x = 0{,}1$.
3. Вычислить методом трапеций $\int_0^2 x dx$ при $\Delta x = 0{,}1$.
4. Вычислить методом трапеций $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$ при $\Delta x = 0{,}25$.
5. Вычислить $\int_0^4 (3x^2 + 4x + 2) dx$, разделив отрезок [0;4] на 40 равных частей.
6. Вычислить $\int_0^8 \frac{dx}{x+1}$, разделив отрезок [0;8] на 40 равных частей.
7. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx dx$, при $\Delta x = 0{,}2$.

Тема 5.2 Численное дифференцирование

Практическое занятие № 17

Тема занятия: Решение задач на нахождение по таблично заданной функции (при n = 2), функции, заданной аналитически

Цель: расширение и закрепление теоретических знаний

Найти $y'(1)$ *и* $y''(1)$ для функции *y* (*x*), заданной таблицей

x	- 3	- 1	0	2	3	4

y	5	2	- 4	- 1	6	5

7. Промежуточная аттестация.

Промежуточная аттестация по учебной дисциплине «Математика» проводится в форме экзамена (3 семестр).

К промежуточной аттестации по учебной дисциплине допускаются все студенты.
При явке на промежуточную аттестацию студентам необходимо иметь зачетную книжку.
По результатам всех видов оценочной деятельности студенту выставляется отметка по учебной дисциплине. Шкала оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».
Студенты, не прошедшие промежуточную аттестацию в установленное время по уважительной причине, подтвержденной документально соответствующим документом, сдают её индивидуально, в установленные сроки .

Вопросы для экзамена (3 семестр)

Вопросы для проверки уровня обученности «ЗНАТЬ»

1. Определение комплексных чисел. Основные формы комплексных чисел. Геометрическая интерпретация комплексных чисел
2. Действия с комплексными числами, представленными в различных формах. Переход от алгебраической формы к тригонометрической и обратно
3. Множество и его элементы. Пустое множество, подмножества некоторого множества.
4. Операции над множествами. Отображение множеств. Понятие функции и способы ее задания, композиция функций.
5. Отношения, их виды и свойства. Диаграмма Венна. Числовые множества
6. Определение графа, виды графов: полные, неполные. Элементы графа: вершины, ребра; степень вершины. Цикл в графе. Связанные графы
7. Функции одной независимой переменной. Пределы. Непрерывность функций
8. Производная, геометрический смысл. Исследование функций
9. Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование. Замена переменной
10. Функции нескольких переменных. Приложения интеграла к решению прикладных задач. Частные производные
11. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
12. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Общие и частные решения.
13. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
14. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами
15. Числовые ряды. Сходимость и расходимость числовых рядов.
16. Признак сходимости Даламбера. Признак сходимости Коши
17. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости рядов.
18. Признак Лейбница. Степенные ряды. Ряды Фурье
19. Понятие события и вероятности события. Достоверные и невозможные события. Классическое определение вероятности.
20. Теорема сложения вероятностей. Теорема умножения вероятностей
21. Случайная величина. Дискретная и непрерывная случайные величины.
22. Закон распределения случайной величины
23. Математическое ожидание дискретной случайной величины. Дисперсия случайной величины.
24. Формулы прямоугольников. Формула трапеций. Формула Симпсона.

25. Численное дифференцирование. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на интерполяционных формулах Ньютона.
26. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений
27. Определение комплексных чисел.
28. Основные формы комплексных чисел.
29. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.
30. Формула корней квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом.
31. Действия над комплексными числами, представленными в различных формах.
32. Переход от алгебраической формы к тригонометрической и обратно.
33. Производная функции, ее геометрический и физический смысл.
34. Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование. Замена переменной.
35. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
36. Общие и частные решения. Порядок дифференциального уравнения.
37. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
38. Линейные однородные уравнения первого порядка.
39. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
40. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами
41. Числовые ряды. Сходимость и расходимость числовых рядов.
42. Признаки сходимости: первый и второй признаки сравнения.
43. Признак сходимости Д`Аламбера. Признак сходимости Коши.
44. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости рядов.
45. Признак Лейбница.
46. Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда.
47. Ряды Фурье.
48. Основные комбинаторные конфигурации: сочетание, размещение и перестановки (с повторениями и без повторений).
49. Основные правила комбинаторики.
50. Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов.
51. Понятие события и вероятности события. Достоверные и невозможные события. Совместные и несовместные события.
52. Классическое определение вероятности.
53. Теоремы сложения вероятностей.
54. Теоремы умножения вероятностей.
55. Формула полной вероятности и формула Байеса.
56. Повторение испытаний. Формула Бернулли.
57. Формулы прямоугольников. Формула трапеций. Формула Симпсона.
58. Численное дифференцирование. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на интерполяционных формулах Ньютона.
59. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Вопросы для проверки уровня обученности «УМЕТЬ»

1. Применять математические методы для решения профессиональных задач
2. Решать прикладные электротехнические задачи методом комплексных чисел
3. Определять максимум мощности в цепи постоянного тока с применением производной
5. Вычислять простейшие определенные интегралы
6. Вычислять площади и объемы при проектировании объектов транспорта с применением определенного интеграла
7. Выполнять разложение функций в ряд Фурье;

8. Производить расчет электрических цепей несинусоидальных периодических токов с использованием рядов Фурье
9. Решать задачи на нахождение математического ожидания и дисперсии при оценке эффективности заказов и обслуживания потребителей услуг и при оценке систем надежности, безопасности и качества услуг на железнодорожном транспорте
10. Выполнять действия над комплексными числами, представленными в разных формах
11. Находить производную функции, вычислять интегралы методом непосредственного интегрирования и методом замены
12.Решать обыкновенные дифференциальные уравнения
13. Исследовать ряд на сходимость, раскладывать функцию в ряд Тейлора
14. Выполнять разложение функций в ряд Фурье
15. Решать простейшие комбинаторные задачи
16. Решать задачи на нахождение вероятности события
17. Решать задачи на нахождение математического ожидания и дисперсии